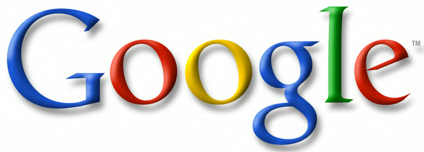
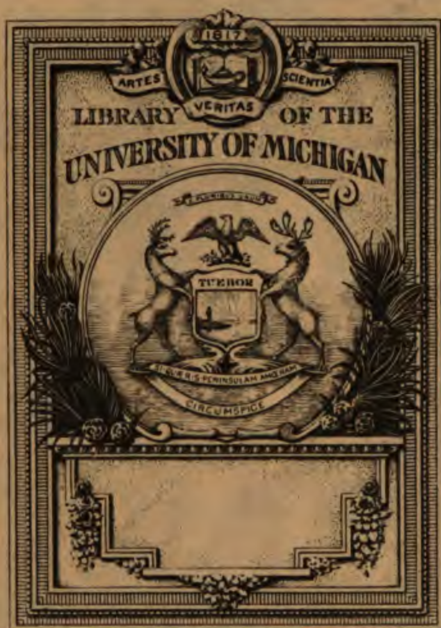


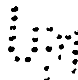

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Aritmetik og Algebra

til Skolebrug

af

Julius Petersen.



I. Rationale Størrelser.

Sjette Udgave.

Kjøbenhavn.

Karl Schønberg.

1892.

Kjøbenhavn. — Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

Indledning.

Størrelser. Enhver Genstand kan tænkes delt, og omvendt kunne Delene tænkes sammensatte.

Dersom Delene sammensættes i forskellig Orden, ville nogle Egenskaber ved Genstandene forandres, men andre ikke; om de Egenskaber, der ikke forandres, men som forandres, hvis nogle af Delene borttages, sige vi, at de have Størrelse. Saaledes har en Genstands Vægt Størrelse, thi Vægten forandres ikke, om end Delenes Orden forandres. En Marks Fladeindhold har Størrelse, thi det forandres ikke, om end Markens Dele sammensættes paa en anden Maade; en Linies Længde har Størrelse, thi den forandres ikke, dersom Linien deles og Stykkerne sammensættes paa en anden Maade. Derimod har Farven ikke Størrelse, thi om den end ikke forandres ved Forandring af Delenes Orden, forandres den heller ikke, naar nogle af Delene borttages.

Maaling ved hele Tal. Man maaler en Størrelse ved at angive, hvor mange Gange den indeholder en vis Størrelse af samme Art, som forudsættes bekendt (Fod, Kvadratfod, Pund o. s. v.). Dette angives ved et Tal. Talrækken forudsættes her bekendt.

Den Størrelse, der tjener som Maal, kaldes Enheden; den maa være af samme Art som den, der skal maales, men er for Resten vilkaarlig. Dersom Enhedens Navn angives, kaldes Størrelsen et benævnt Tal (7 Pund, 5 Fod o. s. v.); dersom man ikke tænker paa nogen bestemt Enhed, men kun vil udtrykke noget, der gælder for enhver Enhed, udelades Benævnelsen, og man skriver blot det ubenævnte Tal.

Ensartede Størrelser kunne maales ved samme Enhed (Krone og Øre, Centner og Pund o. s. v.); de kaldes ensbenævnte, naar de ere maalte ved samme Enhed (7 Øre og 12 Øre).

Brøk. Dersom en Størrelse ikke kan maales nøjagtig ved den valgte Enhed, kan man dele denne i et vilkaarligt Antal lige store Dele og benytte en af disse som Enhed. Dersom f. Ex. en Vægt ikke nøjagtig kan maales i Pund, deler man Pundet i 100 Dele og benytter en af disse, et Kvint, som Enhed. Man kan ikke for alle mulige Tilfælde give den ny Enhed et nyt Navn; man betegner derfor Størrelsen, idet man under en Streg sætter det Tal, der angiver det Antal Dele, hvori Enheden er delt, medens man over Stregen sætter det Tal, der angiver, hvor mange af de ny Enheder, der findes i den maalte Størrelse. Det første Tal kaldes Nævneren, det sidste Tælleren, medens hele Størrelsen kaldes en Brøk. $\frac{5}{7}$ (5 Syvendedele) betyder saaledes 5 saadanne Dele, af hvilke der gaar 7 paa den oprindelige Enhed.

Brøker med samme Nævner ere ensbenævnte, da de ere udtrykte ved samme Enhed (idet den oprindelige Enhed forudsættes at være den samme).

Brøker kaldes uægte, dersom Tælleren er større, ægte, dersom Tælleren er mindre end Nævneren. De

kaldes *uegentlige*, dersom de ogsaa kunne skrives som hele Tal; saaledes er $\frac{7}{7}$ en uegentlig Brøk, da den betegner det samme som 1; i Almindelighed bliver enhver Brøk lig 1, naar dens Tæller og Nævner ere lige store, thi naar man deler Enheden i et vist Antal lige store Dele og tager alle disse Dele med, har man den oprindelige Enhed. Ofte kan en Del af en Størrelse maales ved et helt Tal, medens det, der bliver tilovers, maales ved en Brøk; en saadan Størrelse kaldes et *blandet* Tal. $3\frac{5}{7}$ betegner saaledes en Størrelse, der indeholder 3 af de oprindelige Enheder og desuden 5 af de ny Enheder, der dannes ved at dele den oprindelige Enhed i 7 lige store Dele.

Rationale og irrationale Størrelser. Dersom den Størrelse, der skal maales, ikke kan maales nøjagtig ved nogen Enhed, der kan dannes ved Deling af den oprindelige Enhed, kaldes den *irrational*. Til saadanne Størrelser vil Regningen føre os i det følgende, medens man paa Grund af Sansernes og Maaleredskabernes Ufuldkommenhed ikke kender dem gennem Erfaringen. I Modsætning til saadanne Størrelser kaldes de hele Tal og Brøker *rationale Størrelser*.

Matematik er Læren om Størrelser; den kaldes *ren*, naar den kun beskæftiger sig med Størrelsens Egenskaber i Almindelighed, *anvendt*, naar den anvender de fundne Resultater paa særlige Forhold (Geometri, Mekanik, Landmaaling, Maskinlære o. s. v.). Den rene Matematik indledes med *Algebraen* (Aritmetik).

Tegn. For Kortheds Skyld anvendes Tegn. $=$ betyder «lige stor med», $>$ «større end», $<$ «mindre end», $+$ (plus) «hvortil skal lægges», $-$ (minus) «hvorfra skal trækkes».

Vil man skrive, at en Vægt paa 12 ℔ bestaar af to Dele, en paa 7 ℔, en paa 5 ℔, skriver maa altsaa

$$12\text{ ℔} = 7\text{ ℔} + 5\text{ ℔}.$$

Vil man skrive, at der til 12 ℔ føjes 7 ℔, derpaa borttages først 5 ℔ og dernæst 3 ℔, og at man derved har faaet 11 ℔, skriver man

$$12\text{ ℔} + 7\text{ ℔} - 5\text{ ℔} - 3\text{ ℔} = 11\text{ ℔}$$

eller, dersom Benævnelsen underforstaas,

$$12 + 7 - 5 - 3 = 11.$$

Bogstaver. Dersom man vil skrive et Tal, og det er ligegyldigt, hvilket Tal man skriver, sætter man et Bogstav, ligegyldigt hvilket, i Tallets Sted; et Bogstav betegner altsaa et hvilket som helst Tal, dog saaledes, at det samme Bogstav i den samme Regning overalt betegner det samme Tal. Ved Anvendelsen af Bogstaver opnaa vi den Fordel, at de Resultater, vi komme til, udtrykke Sætninger, der gælde for alle Tal; vil man f. Eks. med Tegn skrive, at enhver Brøk, hvis Tæller og Nævner ere lige store, er 1, skriver man

$$\frac{a}{a} = 1,$$

og her staar da, at Sætningen gælder i alle Tilfælde, medens man ved at skrive f. Eks. $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{11}{11} = 1$ o. s. v. kun skriver, at Sætningen gælder netop i de Tilfælde, man anfører.

Det er klart, at dersom man til et Tal lægger et andet og derpaa atter trækker dette fra, beholder man det første Tal tilbage; man har f. Eks.

$7 + 5 - 5 = 7$; $8 + 3 - 3 = 8$; $11 + 1 - 1 = 11$ o.s.v.; man blev aldrig færdig med at nævne alle mulige Tilfælde her; men skriver man

$$a + b - b = a,$$

har man alle mulige Tilfælde tagne paa een Gang.

Lige store Størrelser, forbundne ved Tegnet $=$, danne en Ligning. Ligningen

$$a - a = 0$$

udtrykker altsaa den Sætning, at dersom man fra en Størrelse tager selve Størrelsen, bliver der Intet tilbage. Ligningen

$$a + b = b + a$$

udtrykker, at man faar det samme Resultat, om man til et Tal lægger et andet, eller om man til det andet lægger det første, o. s. v.

En Parentes betegner, at det, som staar i Parentesen, skal beregnes for sig. Saaledes betegner

$$(a + b) + (c + d)$$

at man først skal lægge b til a og d til c og derpaa lægge det sidste Resultat til det første; altsaa er f. Eks.

$$(1 + 3) + (2 + 4) = 4 + 6 = 10;$$
$$6 - (3 + 2) = 6 - 5 = 1;$$
$$7 + (3 + 5) - (4 - 1) = 7 + 8 - 3 = 12;$$
$$(5 - 1) - (4 - 1) = 4 - 3 = 1.$$

Dersom et Tal i Talrækken betegnes ved a, maa det følgende betegnes ved $a + 1$, da det indeholder 1 Enhed flere; det følgende er altsaa $a + 2$ o. s. v. Forud for a gaar derimod Tallet $a - 1$, forud for det $a - 2$ o. s. v.

I. Rationale Størrelser.

Addition.

1. At addere er at finde det Tal (Summen), der indeholder lige saa mange Enheder som flere givne Tal (Addenderne) tilsammen.

Hvorledes hele Tal adderes forudsættes bekendt.

Regningen tænkes udført fra venstre mod højre, men det følger af vor Definition af Størrelse, at Addendernes Orden er ligegyldig.

Man har altsaa f. Eks.

$$7 + 5 + 3 = 5 + 7 + 3 = 3 + 5 + 7 = 15;$$

$$a + 0 = 0 + a = a;$$

$$a + b + c = a + c + b = b + c + a = c + b + a \text{ o.s.v.}$$

2. I en Række af Addender kan man sætte eller bortkaste Parenteser efter Behag, da disse ingen anden Indflydelse have, end at de forandre Addendernes Orden. Saaledes er

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7); \ (2 + 3) + (4 + 5) = 2 + 3 + 4 + 5$$
$$= 2 + (3 + 4 + 5) \text{ o. s. v.};$$

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d = (a + b) + (c + d)$$
$$= (c + a) + (b + d) = (c + b + a) + d = d + (a + c + b)$$

o. s. v.

(Indsæt heri $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, og udfør Beregningen i alle Udtrykkene).

Som bekendt deles Tal, større end 10, i Enere, Tiere, Hundreder o. s. v. (Titalsystemet). Ved Addition af saadanne Tal forandrer man Addendernes Orden og adderer Enerne for sig, Tierne for sig o. s. v., idet man erindrer, at 10 Enere ere en Tier, 10 Tiere et Hundrede o. s. v. (Mente).

3. Addition af benævnte Tal kan kun udføres, dersom Tallene ere ensbenævnte; man adderer da de ubenævnte Tal, medens Enheden lades uforandret; saaledes er

7 ℔ + 5 ℔ = 12 ℔; 18 Fod + 4 Fod + 13 Fod = 35 Fod.

4. Addition af ensbenævnte Brøker udføres, idet man adderer Tællerne og lader den fælles Nævner uforandret; de ensbenævnte Brøker have nemlig samme Enhed og behandles derfor som andre ensbenævnte Størrelser.

Eks. $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$; $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = 1$;

$$\frac{5}{11} + \frac{3}{11} + \frac{7}{11} = \frac{15}{11};$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a+b}{g} + \frac{d+e}{g} = \frac{(a+b)+(d+e)}{g}$$
$$= \frac{a+b+d+e}{g};$$

$$1 + \frac{a}{b} = \frac{b}{b} + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}; \quad \frac{a}{b+a} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

5. Ligesom man skriver 3 ℔ for 1 ℔ + 1 ℔ + 1 ℔, skrives ogsaa kortere $3a$ for $a + a + a$, $4a$ for $a + a + a + a$ o. s. v.

Eks. $(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)$

$$= a+b+a+b+a+b+a+b$$

$$= a+a+a+a+b+b+b+b = 4a+4b;$$

$$(3a+2b)+(a+3b) = 3a+2b+a+3b$$

$$= 3a+a+2b+3b$$

$$= (a+a+a)+a+(b+b)+(b+b+b)$$

$$= a+a+a+a+b+b+b+b+b = 4a+5b;$$

$$3a+4a = 7a;\; 5a+6a+3b+5b = 11a+8b;$$

$$\frac{2a+3b}{c}+\frac{3a+2b}{c} = \frac{2a+3b+3a+2b}{c} = \frac{5a+5b}{c};$$

$$\frac{a+0}{2a+3b}+\frac{a+b}{2a+3b}+\frac{2b}{2a+3b} = \frac{2a+3b}{2a+3b} = 1;$$

$$0+a+[2a+(a+b)+(2a+3b)] = 6a+4b;$$

$$(a+b)+[(b+c)+(c+a)] = 2a+2b+2c.$$

I ovenstaaende Eksempler indsættes overalt, saa vel før som efter Reduktionen (Sammentrækningen), $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Subtraktion.

6. At **subtrahere** (trække) et Tal b (**Subtrahenden**) fra et andet a (**Minuenden**) er at finde det Tal (**Differensen**, Forskellen, Resten), som, adderet til b, giver a.

Man har altsaa

$$a - b = c, \text{ dersom } c + b = a, \qquad (1)$$

og prøver derfor Rigtigheden af en Subtraktion ved at undersøge om

Differens + Subtrahend = Minuend.

Eks. $15-8 = 7$, thi $7+8 = 15$; $a-0 = a$ og $a-a = 0$, thi $a+0 = a$; $2a-a = a$, thi $a+a = 2a$; $7a-3a = 4a$, thi $3a+4a = 7a$.

Da lige store Størrelser maa kunne sættes i Stedet for hinanden, kan man i den første Ligning (1) for a sætte $c + b$ og i den anden (1) for c sætte $a - b$, hvorved man faar $c + b - b = c$; $a - b + b = a$, der vise, at Addition og Subtraktion (eller omvendt) af samme Tal hæve hinanden. Addition og Subtraktion kaldes derfor modsatte Regningsarter. Vi maa dog her, som i det følgende, forudsætte, at Minuenden ikke er mindre end Subtrahenden, da vi ikke kunne trække et større Tal fra et mindre.

7. Hvorledes hele Tal subtraheres forudsættes bekendt; om Tal større end 10 og ensbenævnte Tal gælde lignende Bemærkninger som de, vi have gjort ved Addition.

8. Man kan subtrahere en Brøk fra en anden med samme Nævner ved at subtrahere Tællerne, medens Nævneren bliver uforandret.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \text{ thi } \frac{a-b}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a-b+b}{c} = \frac{a}{c}.$$

9. I en Række af flere med $+$ og $-$ forbundne Størrelser udføres Regningen fra venstre mod højre.

$$a - b + c - d$$

betyder derfor, at man fra a skal trække b, til det udkomne lægge c, fra det udkomne trække d. Addenderne og Subtrahenderne kaldes med et fælles Navn Led, og Størrelsen kaldes en flerleddet Størrelse (et Polynomium). Hvert Led har sit Fortegn, $+$ eller $-$, der angiver, om Tallet skal adderes eller subtraheres. Det første Led kan tænkes med Fortegnet $+$ underforstaaet, idet a er det samme som $0 + a$, og 0 ikke skrives. a er en enkeltleddet Størrelse (et Monomium), $a - b$ en toleddet Størrelse (et Binomium) o. s. v. Dersom der i

en flerleddet Størrelse findes Parenteser, maa man, idet man tæller Leddene, erindre, at en Parentes er at regne som et enkelt Bogstav. $(a + b) + (c - d)$ er en toleddet Størrelse, men hvert af Leddene bestaar atter af to Led.

Selv naar vi i det følgende indføre ny Tegn, betragtes + og — som Hovedtegnene, der bestemme Antallet af Led i Størrelsen. Hvert Led skal da beregnes for sig og derpaa Additionerne og Subtraktionerne udføres.

10. I en flerleddet Størrelse kan man ombytte en Addend og en Subtrahend, der følge efter hinanden.

$$a + b - c = a - c + b, \text{ thi } a - c + b + c$$
$$= a - c + c + b = a + b.$$

11. I en flerleddet Størrelse kan man ombytte to Subtrahender, der følge efter hinanden.

$$a - b - c = a - c - b, \text{ thi } a - c - b + c$$
$$= a - c + c - b = a - b.$$

Ved efterhaanden at anvende disse to Sætninger samt Sætningen i 1 kan man i en flerleddet Størrelse bringe Addenderne og Subtrahenderne i en hvilken som helst Orden; altsaa er Leddenes Orden ligegyldig.

Eks. Hvorledes bringes $a - b + c - d$ til at antage Formen $c - b - d + a$?

12. I en flerleddet Størrelse kan man sætte eller bortkaste en Parentes efter Behag, naar blot Parentesens Fortegn er +.

Man ser nemlig let, at Sætningen gælder om de første Led. $a + b - c$ og $(a + b) - c$ betegne det samme, da Regningen skal udføres fra venstre mod højre. Ved Ombytning af Leddene kan man imidlertid bringe hvilke Led, man vil, forrest (det forreste maa dog være en

Addend), sætte Parentesen og føre denne hen, hvor den skal staa.

Eks. $a + b - c = a + (b - c)$,

thi $a + b - c = (b - c) + a = a + (b - c)$;

$$a + [(b - c) + (c - d)] = a + b - c + c - d$$
$$= a + b - d;$$
$$2a + (b + (2a - b) + (b - 4a))$$
$$= 2a + b + 2a - b + b - 4a = b.$$

13. **En Parentes med Fortegnet — kan bortkastes, naar samtidig alle Leddene i Parentesen faa forandrede Fortegn, og omvendt kan en Parentes med Fortegnet — sættes om nogle af Leddene, naar samtidig disses Fortegn forandres.**

Ligesom ved den forrige Sætning indse vi, at vi kun behøve at betragte de forreste Led, da de Led, som man betragter, kunne stilles forrest; nu har man

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d,$$

thi $a - b - c + d + (b + c - d) = a$.

Man maa her erindre, at Parentesens Fortegn falder bort tillige med Parentesen; i dets Sted kommer det forandrede (underforstaaede) Fortegn for det første Led i Parentesen. b ovenfor har underforstaaet $+$, og det er dette $+$, som forandres, naar vi skrive $- b$.

Eks. $a - (b - c) + (2b - c) = a - b + c + 2b - c$

$$= a + 2b - b = a + b;$$
$$a - b - b - b = a - (b + b + b) = a - 3b;$$
$$(a - b) + (a - b) + (a - b) = a + a + a - b - b - b$$
$$= 3a - (b + b + b) = 3a - 3b;$$
$$a - b + c - d = a - (b - c + d) = a - (b - (c - d)).$$

14. Vi kunne nu behandle en flerleddet Størrelse paa følgende Maade:

Først hæves de yderste Parenteser; derpaa hæves de, der nu ere de yderste, og saaledes videre, til alle Parenteser ere bortskaffede. Derpaa ordnes Leddene (for Overskueligheds Skyld i Almindelighed med Bogstaverne i alfabetisk Orden), og endelig sammentrækkes de saa meget som muligt.

Eks. $a - [a - (b + a) + (a - b)]$

$$= a - a + (b + a) - (a - b)$$

$$= a - a + b + a - a + b = a - a + a - a + b + b = 2b;$$

$$a - [b - (a - b) + c] + [(a - c) - b]$$

$$= a - b + (a - b) - c + (a - c) - b$$

$$= a - b + a - b - c + a - c - b$$

$$= a + a + a - b - b - b - c - c = 3a - 3b - 2c.$$

Ved Anvendelsen af alle de her lærte Sætninger er dog, som nævnt ovenfor, at mærke, at man ved Omordningen af Leddene maa sørge for, at man ikke derved kommer til at forlange, at et større Tal skal trækkes fra et mindre, da vi endnu maa anse dette for umuligt. Har man altsaa f. Eks. $5 + 7 - 9 + 4$, tør man vel skrive dette som $5 + 7 + 4 - 9$ eller som $5 + 4 - 9 + 7$ eller som $5 + 4 - (9 - 7)$, men ikke som $5 - 9 + 7 + 4$ eller som $5 + (4 - 9) + 7$, da man ikke kan trække 9 fra 5 eller fra 4. Vi skulle nu vise, hvorledes man kan undgaa denne Vanskelighed og bruge de angivne Regler i alle Tilfælde, uden at bryde sig om Tallenes Størrelse.

Positive og negative Størrelser.

15. Dersom man har Penge til gode og skylder Penge bort, kan man spørge om, hvor meget der bliver tilovers af Fordringer eller Gæld, naar man, saa vidt

muligt, betaler sin Gæld med sine Fordringer; vi ville for Kortheds Skyld betegne Fordringer ved F., Gæld ved G.

Dersom man har 700 Kr. F. og 500 Kr. G., finder man

$$700 - 500 = 200,$$

der viser et Overskud af 200 Kr. F. Har man derimod 700 Kr. G. og 500 Kr. F., viser den samme Regning et Overskud af 200 Kr. G.; man maa altsaa regne paa forskellig Maade, efter som F. eller G. er størst.

Har man a Kr. F. og b Kr. G., bliver derfor Resultatet $(a - b)$ Kr. F., dersom $a > b$, men $(b - a)$ Kr. G., dersom $b > a$.

Dersom man benytter den urigtige Regel, faar man et meningsløst Resultat; har man 700 Kr. G. og 500 Kr. F., og bruger man den urigtige Regel, faar man (500—700) F., medens man skal have (700—500) G.; dersom man derfor vedtager, at lade det første Udtryk (som endnu Intet betyder) betyde det samme som det andet, kan man bruge, hvilken af Reglerne man vil; man bruger at sætte + (der kan underforstaas) foran Resultatet, dersom dette angiver en Størrelse af samme Navn som Minuenden, —, dersom det angiver en Størrelse af samme Navn som Subtrahenden; man har altsaa

$$700 - 500 = +200;$$
$$500 - 700 = -200.$$

Vi kunne nu, naar vi løse en Opgave om Fordringer og Gæld, udføre Regningen i en hvilken som helst Orden; have vi f. Eks.

$$500 - 700 + 300 - 400,$$

kunne vi først skrive

$$-200 + 300 - 400,$$

idet vi sætte 200 Kr. G. i Stedet for 500 Kr. F. og 700 Kr. G.; paa samme Maade have vi videre

$$-200 + 300 - 400 = 100 - 400 = -300,$$

der viser, at det endelige Overskud er 300 Kr. G.

16. Dersom en Mand har a Kr. F. og overtager en anden Mands F. og G., der bestaar af b Kr. F. og c Kr. G., skrives dette

$$a + (b - c);$$

dersom nu $b > c$, betegner $b - c$ en Fordring, og man skal da udføre en Addition; dersom $b < c$, betegner $b - c$ en Gæld, og man skal udføre en Subtraktion; man har altsaa f. Eks.

$$300 + (700 - 500) = 300 + (+ 200) = 300 + 200;$$
$$300 + (500 - 700) = 300 + (- 200) = 300 - 200.$$

Tal med Fortegnet $+$ kaldes positive, med Fortegnet $-$ negative. Tallet uden Fortegn kaldes den numeriske Værdi; $+7$ og -7 have altsaa begge den numeriske Værdi 7. Efter hvad vi have vist, kunne vi altsaa opstille følgende Regler:

Man trækker et større Tal fra et mindre ved at trække det mindre fra det større og give det udkomne Fortegnet $-$.

Man adderer et positivt Tal ved at addere dets numeriske Værdi, et negativt Tal ved at subtrahere dets numeriske Værdi.

Heraf følger da atter:

Man subtraherer et positivt Tal ved at subtrahere dets numeriske Værdi, et negativt Tal ved at addere dets numeriske Værdi.

$a - (+b) = a - b$, thi $a - b + (+b) = a - b + b = a$;
$a - (-b) = a + b$, thi $a + b + (-b) = a + b - b = a$.

Disse Regler kunne samles i følgende:

Man hæver og sætter Parenteser, derinde-

holde Tal med Fortegn, efter de samme Regler, som gælde for flerleddede Størrelser.

17. Da vi nu kunne trække et større Tal fra et mindre og regne med de derved fremkomne negative Tal, falder den Indskrænkning bort, som vi tidligere omtalte, ved flerleddede Størrelser. Dette er ganske vist kun bevist under den Forudsætning, at vore Tal betegne Fordringer og Gæld; man ser imidlertid let, at man kan benytte de samme Regler i alle Tilfælde, thi man regner med de ubenævnte Tal, og Resultatet maa derfor blive det samme, hvad enten disse hidrøre fra en Opgave om Fordringer og Gæld eller fra en anden Opgave; Forskellen er blot den, at Mellemregningerne kunne blive meningsløse, dersom der ikke kan tillægges de negative Tal nogen Betydning, men Resultatet bliver dog det rigtige. Lad os f. Eks. antage, at vi have følgende Opgave: En Mur er 12 Fod lang; der mures 18 Fod til og rives derpaa 15 Fod ned; hvor lang er den nu? Vi faa da, at den har Længden 15 Fod, idet

$$12 + 18 - 15 = 15,$$

men vi kunne lige saa godt skrive

$$12 - 15 + 18 = -3 + 18 = 15,$$

uagtet det her er meningsløst at trække 15 fra 12.

18. Medens vi hidtil have ladet et Bogstav betegne et hvilket som helst Tal uden Fortegn, kunne vi nu ogsaa lade det betegne et Tal med Fortegn. Naar vi ovenfor sagde, at en Mand har a Kr. F. og b Kr. G., og fandt Resultatet $(a - b)$ Kr. F., vil dette Resultat ogsaa være rigtigt, dersom f. Eks. a og b ere negative, saa at a Kr. F. i Virkeligheden betegner en Gæld, og omvendt; vi komme derved til, at der ingen væsentlig Forskel er paa Addition og Subtraktion, idet en af disse Regninger altid kan

forandres til den modsatte, naar vi samtidig forandre den Størrelses Fortegn, med hvilken Regningen skal udføres. $a + b$ findes ved en Addition, dersom a og b betegne Størrelser med samme Fortegn, men ved en Subtraktion, dersom de betegne Størrelser med forskellige Fortegn; det forholder sig omvendt med $a - b$; saaledes er

$$(+7) + (+5) = +12;\ (+7) + (-5) = +2;$$
$$(-7) + (+5) = -2;\ (-7) + (-5) = -12;$$
$$(+7) - (+5) = 2;\ (+7) - (-5) = 12;$$
$$(-7) - (+5) = -12;\ (-7) - (-5) = -2.$$

Man bemærker, at en Sum af to Tal altid har samme Fortegn som det numerisk største af Tallene.

19. Idet vi benytte Tal med Fortegn, kommer Tallet til ikke alene at betegne en Størrelse, men tillige en Handling, som skal foretages; $+7$ og -7 betegne ikke alene f. Eks. 7 Kr., men tillige henholdsvis, at disse 7 Kr. skulle tages ind eller gives ud; $+$ og $-$ betegne altsaa Handlinger, som, naar Tallets numeriske Værdi er den samme, tilintetgøre hinandens Virkning. Saadanne Tal kaldes derfor modsatte Størrelser. Det er ligegyldigt, hvilken af de modsatte Størrelser vi betegne med $+$, men naar denne er valgt, er derved bestemt, hvad $-$ betegner; dersom vi f. Eks. ved $+8$ betegne 8 Mil tilbagelagte mod Øst, maa -8 betegne 8 Mil tilbagelagte mod Vest, fordi disse to Handlinger, foretagne efter hinanden, tilintetgøre hinandens Virkning, naar vi spørge om, hvor langt vi ere komne fra vort Udgangspunkt. Spørger jeg i en Opgave om, hvor mange Mennesker der ere gaaede ind i et Hus, og jeg faar Svaret -7 Mennesker, betyder dette (forudsat, at det, at et Menneske gaar ind, betegnes ved $+1$), at 7 Mennesker ere gaaede ud; det negative Svar

viser altsaa, at jeg har stillet mit Spørgsmaal galt; men det viser tillige det rigtige Svar, uden at det er nødvendigt, at gøre Regningen om; i Eksemplet, vi her brugte, skulde vi egentlig have spurgt om, hvor mange Mennesker, der vare gaaede ud, og havde da faaet Svaret 7.

Eksempler til Øvelse.

1. En Mand har 300 Kr. F., 700 Kr. F. og 1100 Kr. G.; hvor stor er hans Formue?

2. A. gaar ud fra en By, først 7 Mil mod Nord, derpaa 11 Mil mod Syd, derpaa 3 Mil mod Nord og derpaa 8 Mil mod Syd; hvor mange Mil befinder han sig nu Nord for Byen?

3. Et Thermometer viste Ispunktet (0 Grader), steg derpaa først 3 og saa 7 Grader, men faldt derefter 13 Grader; hvor mange Grader Varme viste det nu?

4. Adder Tallene -6, $+11$, -3, $+17$, subtraher derpaa fra det udkomne efterhaanden -9, $+3$, -5, -6.

5. Hvor stor er Summen af 5 paa hinanden følgende Tal i Talrækken, naar det mellemste af Tallene er a? Eks. $a = 7$; $a = -4$.

6. Hvor meget er -11 mindre end -3?

7. Hvor meget er -11 større end -3?

8. Dersom $a > b$, er saa $-a > -b$ eller er $-a < -b$?

9. $a - (b - (a + b)) - a$ reduceres; $a = 3$, $b = -4$ indsættes, saa vel før som efter Reduktionen.

10. Hvad er $3a - 2b$, naar $a = -5$, $b = -2$?

11. Adder 3, -1, $+5$, -9, og subtraher derpaa -5, $+3$ og -2.

12. $(a - b) - (2a - 3b) - (3a - 2b) + (a - b)$; indsæt $a = 3$, $b = -2$ før og efter Reduktionen.

13. $2a - [3b - (b - a) + (a - b)] - (2a - 3b)$.

14. $\frac{a+b}{2} + \frac{2a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2} - \frac{2a-b}{2}$.

15. $(a + b - c) + (a - b + c) - (-a - b + c)$; $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.

16. $3a - 2b - [a - (a - [b - a] + 2b) - b] - 4a$; $a = -1$; $b = 2$; $c = 3$.

17. Hvilket Tal maa man lægge til -4 for at faa -7?

18. Hvad maa man lægge til $a + b$ for at faa $a - b$?

19. Hvorledes kan $15 - 9 + 3 - 7 + 11 - 12$ beregnes, saa at man kun udfører een Subtraktion?

20. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a}{a-b} - \frac{a+2b}{a-b}$.

21.
$$\frac{2a-3b}{a+b} - \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{a-4b}{a+b} - \frac{4a-b}{a+b} + \frac{5a+4b}{a+b} + \frac{b}{a+b}.$$

22. $a + \frac{a}{a-b} - \left(a + \frac{b}{a-b}\right)$.

23. Bevis, at man har Lov til at flytte et Led fra den ene Side af Lighedstegnet over paa den anden Side, naar man samtidig forandrer Leddets Fortegn.

24. $3a - [a + b - (a + b + c - [a + b + c + d])]$.

25. $a - [5b - (a - [3c - 3b] + 2c - [a - 2b - c])]$.

26. $a + 2x - [b + y - (a - x - [b - 2y] - y) + b]$.

27. $\frac{a-b+1}{a+2b} - \frac{a-2b+3}{a+2b} - \frac{2a-3b+1}{a+2b}$; $a = -2$, $b = 2$.

28. Adder $a + 2b$ til $2a - 3b$ og subtraher derpaa det, som $2a - 5b$ er større end $3a - 4b$; $a = 5$, $b = -1$.

Multiplikation.

20. At en Størrelse a skal **multipliceres** med m vil sige, at m Størrelser a skulle adderes. a kan være en hvilken som helst Størrelse, medens m maa være et positivt, helt Tal.

a kaldes **Multiplikanden**, m **Multiplikator**, det udkomne **Produktet**. Multiplikator og Multiplikand kaldes med et fælles Navn **Faktorer**.

At a skal multipliceres med m, skrives $a . m$ eller $a \times m$ eller blot am. Tegnene . og $\times$ læses «Gange»; dersom begge Faktorer ere Tal, kan Tegnet ikke udelades. Vi have altsaa $am = a + a + a \ldots$ (m Gange).

Et benævnt Tal er egentlig et Produkt. I 7 Fod er 7 Multiplikator, 1 Fod Multiplikanden. Her staar altsaa Multiplikator forrest. Nogle Forfattere sætte derfor altid Multiplikator forrest, hvilket vi, naar vi have skrevet $3a$, $7b$ o. s. v., ogsaa hidtil have gjort. Andre sætte den derimod, som vi nu gøre det, bagest, saa at Regningerne, ligesom ved de to første Regningsarter, blive at udføre fra venstre mod højre;

$$abcd$$

betyder da, at a først skal multipliceres med b, det udkomne derpaa med c, det udkomne med d.

Eks. $3 . 5 . 4 = 15 . 4 = 60$; $a . 1 = a$; $1 . a = a$; $0 . a = 0 + 0 + 0 \ldots = 0$.

21. Multiplikation med $-m$ har ifølge den givne Definition ingen Betydning, undtagen naar m selv betyder et negativt Tal, altsaa $-m$ et positivt Tal; man kan derfor forstaa, hvad man vil, ved at multiplicere med $-m$, naar man blot sørger for, at den ny Definition stemmer med den oprindelige, naar m er negativ. Man vedtager

da ved en Multiplikator $-m$ at betegne, at man skal multiplicere med m og derpaa forandre Produktets Fortegn; at multiplicere med $-(-m)$ bliver da, som det ses, at multiplicere med m, thi at forandre Produktets Fortegn to Gange er det samme som at lade det blive uforandret.

22. Man har nu

$$(+a)(+m) = a + a + a \ldots (m \text{ G.}) = +am;$$
$$(-a)(+m) = (-a) + (-a) \ldots (m \text{ G.}) = -am;$$
$$(+a)(-m) = -am; \quad (-a)(-m) = -(-a)\,m = +am.$$

Disse 4 Formler vise, at man finder Produktet af to Tal ved at tage Produktet af deres numeriske Værdier og give dette Fortegnet $+$, dersom Faktorerne have ens, $-$, dersom de have forskellige Fortegn.

Dersom Produktet har flere Faktorer, skifter Fortegnet, hver Gang vi multiplicere med en negativ Faktor. At skifte Tegn et lige Antal Gange er imidlertid det samme som ikke at skifte Tegn. Produktet bliver derfor negativt, dersom det indeholder et ulige Antal negative Faktorer, i modsat Fald positivt.

Man kan udtrykke dette ved at sige, at Tallene multipliceres for sig, Fortegnene for sig; Fortegnenes Produkt er da $-$, naar $-$ findes mellem dem et ulige Antal Gange, ellers $+$.

Eks. $(-a)(-b)(-c) = -abc$; $(-1)(-a) = a$;
$(-3)(-2) \cdot 5 = 30$; $(-1)(a-b) = -(a-b) = b-a$;

$$(-a)(-a) \ldots (7 \text{ G.}) = -a \cdot a \cdot a \ldots (7 \text{ G.});$$
$$a(-1) = -a; \quad (-1)\,a = -a.$$

Dersom $y = (x-5)(x-1)$, bliver y positiv for $x > 5$ og for $x < 1$, negativ for $5 > x > 1$.

23. I Stedet for $a \cdot a \ldots (m \text{ G.})$ skrives kortere a^m,

der læses «a i m^{te} Potens». a^2 kaldes ogsaa Kvadratet af a, a^3 Kubus af a.

Eks. $2^3 = 8$; $1^5 = 1$; $(aaa)(bb) = a^3b^2$;

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2; \; (-3)^3 = -27;$$

$$0^4 = 0; \; a^1 = a; \; (-1)^{17} = -1.$$

24. **Man multiplicerer en Brøk ved at multiplicere dens Tæller.**

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ldots (m \text{ G.}) = \frac{a + a \ldots (m \text{ G.})}{b}$$

$$= \frac{am}{b}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)(-m) = -\left(\frac{a}{b}\right)m = -\frac{am}{b} = \frac{-am}{b},$$

hvor den sidste Ligning definerer Betydningen af en Brøk med negativ Tæller.

25. **Man multiplicerer en flerleddet Størrelse ved at multiplicere alle dens Led.**

$$(a + b - c)m = (a + b - c) + (a + b - c) + (a + b - c) \ldots (m \text{ G.})$$

$$= a + a + a \ldots (m\text{G.}) + b + b + b \ldots (m\text{G.}) - c - c - c \ldots (m\text{G.})$$

$$= am + bm - (c + c \ldots [m \text{ G.}]) = am + bm - cm;$$

$$(a + b - c)(-m) = -(a + b - c)m$$

$$= -(am + bm - cm) = -am - bm + cm.$$

Man ser let, at det samme Bevis kan føres for et hvilket som helst Antal Led.

Omvendt kan man for $am + bm - cm$ skrive $(a + b - c)m$. Man kalder denne Omskrivning **at sætte den fælles Faktor m uden for en Parentes**; dersom den Multiplikator, der sættes uden for Parentesen, har Fortegnet —, faa alle Leddene i Parentesen forandrede Fortegn.

Eks. $(a - b + c - d)m = am - bm + cm - dm$;

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d);$$

$$am + bm - cm - dm = (a + b)m - (c + d)m;$$

$$(a + b)a - (a + b)b = a^2 + ab - (ab + b^2) = a^2 - b^2;$$

$(a^3 + b^2)a^2 = a^3a^2 + b^2a^2$; $(a - b)(-a) = -a^2 + ba$;
$-ma - mb = (a + b)(-m) = -(a + b)m$.

26. **Naar en Brøk multipliceres med sin Nævner, faar man Tælleren.**

$$\frac{a}{b} \cdot b = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ldots (a \text{ G.})\right)b$$
$$= 1 + 1 + 1 \ldots (a\text{ G.}) = a.$$

27. **Multiplikand og Multiplikator kunne ombyttes, naar de ere hele Tal.**

Sætningen gælder, som det let ses, om Fortegnene, da disses Orden ingen Rolle spiller, naar man bestemmer Produktets Fortegn; vi behøve altsaa kun at betragte to positive hele Tal:

$$ab = (1 + 1 + 1 \ldots [a\text{ G.}])b = b + b + b \ldots (a\text{G.}) = ba.$$

Dersom Multiplikanden er benævnt, ombyttes kun Tallene, medens Benævnelsen bliver staaende, f. Eks.

7 Rd. . 3 = 3 Rd. . 7 = 21 Rd.

Man ombytter dog undertiden ogsaa Benævnelsen, da dette ikke kan misforstaas. 7 . 5 Rd. betyder altsaa egentlig 5 Rd. . 7.

De beviste Sætninger gælde ogsaa i det Tilfælde, hvor en Multiplikator er 0, dersom vi vedtage, at $a \cdot 0 = 0$. Et Produkt bliver da 0, naar en af Faktorerne er 0.

Man har nu f. Ex.

$bac = abc = (ab)c$; $b(a + c) = (a + c)b = ab + cb$;
$(-b)(a - c) = -(a - c)b = -(ab - cb) = cb - ab$.

28. **Man multiplicerer et Produkt af to Faktorer ved at multiplicere den ene Faktor og det udkomne med den anden.**

$(ab)c = (a + a \ldots [b\text{ G.}])c = ac + ac \ldots (b\text{ G.}) = (ac)b$
eller blot $abc = acb$.

Man ser heraf, at man kan ombytte to Faktorer, selv

om der gaar en Faktor foran disse; man kan da ogsaa ombytte dem, naar der gaar flere Faktorer foran, thi Multiplikationen af disse skal udføres først, og de kunne derfor tænkes sammentrukne til een Faktor. Det er end videre tydeligt, at man kan ombytte to Faktorer i et Produkt, hvor mange Faktorer der end følge bagefter disse, da disse Faktorer først skulle benyttes, naar man har fundet Produktet af de foregaaende. Man kan altsaa ombytte to hvilke som helst efter hinanden følgende Faktorer i et Produkt af positive og negative hele Tal.

29. Faktorernes Orden er ligegyldig ved hele Tal. Man kan nemlig bringe Faktorerne i en hvilken som helst Orden ved fortsat Ombytning af dem to og to, idet man derved først bringer den paa den første Plads, som skal staa der, saa den paa den anden Plads, som skal staa der, o. s. v. Skal f. Eks. $abcd$ skrives som $dbca$, ombyttes d efterhaanden med c, b og a, hvorved man faar $dabc$; ombyttes derpaa b med a og endelig c med a, har man $dbca$.

30. I en Række af Faktorer kan man sætte eller bortkaste Parenteser efter Behag.

Om de forreste Faktorer ser man, at Sætningen gælder; $abcd$ og $(abc)d$ betegne det samme. Skal man nu sætte en Parentes, kunne de Faktorer, der skulle staa i en saadan Parentes, bringes forrest, og Parentesen kan da sættes; denne er nu at betragte som en enkelt Faktor; et andet Sæt Faktorer bringes nu forrest, en ny Parentes sættes o. s. v.

$$abcdef = (ef)(cd)(ab), \text{ thi } abcdef = (ab)cdef = cdef(ab)$$
$$= (cd)ef(ab) = (ef)(cd)(ab).$$

Dersom der i et Produkt er en Talfaktor, sættes denne forrest og kaldes Koefficienten.

31. Man kan nu multiplicere et vilkaarligt Antal Produkter paa følgende Maade:

Først bestemmes Produktets Fortegn; derpaa bestemmes dets Koefficient ved Multiplikation af alle Faktorernes Koefficienter; Bogstavfaktorerne stilles derpaa efter hinanden (for Overskuelighedens Skyld i Almindelighed i alfabetisk Orden) saaledes, at de, der ere ens, samles og skrives paa den vedtagne korte Maade (23).

Eks. $(ab)(ab)(ab) = aaabbb = a^3b^3$;

$$a^3a^4 = aaaaaaa = a^7;\ aa^5 = a(aaaaa) = a^6;$$

$$ab^2a^2b = aaabbb = a^3b^3;$$

$$3a^2b\,.\,2ab^2\,.\,3ab = 3\,.\,2\,.\,3\,.\,a^2\,.\,a\,.\,a\,.\,b\,.\,b^2\,.\,b = 18a^4b^4;$$

$$(a^2b)^3 = a^2b\,.\,a^2b\,.\,a^2b = a^2a^2a^2bbb = a^6b^3;$$

$$(-2ab^2)(-3ab^3)(-2c) = -12aab^2b^3c = -12a^2b^5c;$$

$$(-3a^3bc)(2ab^2c)(-2ab) = 12a^3aabb^2bcc = 12a^5b^4c^2;$$

$$(-2ac^2b)(-2a^2bcd)(-3ad^3)(-a) = 12a^5b^2c^3d^4.$$

32. To flerleddede Størrelser multipliceres ved, at man multiplicerer alle Leddene i den ene efterhaanden med hvert Led i den anden og adderer de udkomne Led.

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$

$$= ac + ad + bc + bd;$$

$$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d)$$

$$= ac - ad - bc + bd.$$

Ved Multiplikationens Udførelse skrives Faktorerne under hinanden, og de udkomne ensartede Led under hinanden for derpaa at sammentrækkes; skal man f. Eks. finde Produktet $(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c)$, skrives Regningen saaledes

$$
\begin{array}{llll}
a - 2b + 3c & & & \\
a + 2b - 3c & & & \\
\hline
a^2 - 2ab + 3ac & & & \\
\quad + 2ab & - 4b^2 & + \; 6bc & \\
\quad\quad - 3ac & & + \; 6bc & - 9c^2 \\
\hline
a^2 & - 4b^2 & + 12bc & - 9c^2,
\end{array}
$$

altsaa

$$(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c) = a^2 - 4b^2 + 12bc - 9c^2.$$

33. Kvadratet af en toleddet Størrelse faar tre Led, nemlig Kvadratet af det første Led (altid positivt), det dobbelte Produkt af de to Led (positivt eller negativt, efter som disse have ens eller forskelligt Fortegn) og Kvadratet af det andet Led (positivt).

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Denne Regel kan ogsaa anvendes paa en Størrelse med flere Led, idet da i denne flere af Leddene tages som eet Led.

$$(a + b - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc;$$
$$(a + b - c - d)^2 = ((a + b) - (c + d))^2$$
$$= (a + b)^2 - 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 \text{ o. s. v.}$$

34. To Størrelsers Sum, multipliceret med de samme to Størrelsers Differens, giver den første Størrelses Kvadrat minus den anden Størrelses Kvadrat.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(-a + b)(-a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)^2 - c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2;$$

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d)$$
$$= [(a+c)+(b+d)][(a+c)-(b+d)]$$
$$= (a+c)^2 - (b+d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 - 2bd - d^2;$$
$$25c^2 - 9d^2 = (5c+3d)(5c-3d);$$
$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$
$$= a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c).$$

35. Skal en flerleddet Størrelse om muligt skrives som et Produkt, have vi foreløbig intet andet Middel end at forsøge at finde Faktorerne ved at sætte fælles Faktorer uden for Parenteser. Man kan ofte benytte Formlen $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Eks. $am + bm - an - bn = m(a+b) - n(a+b)$
$$= (m-n)(a+b);$$
$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 5x - 2x + 10$$
$$= x(x-5) - 2(x-5) = (x-2)(x-5);$$
$$a^2 + a - ab - b = a(a+1) - b(a+1) = (a+1)(a-b);$$
$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a-b)^2 - c^2$$
$$= (a-b+c)(a-b-c);$$
$$a^2 - b^2 - (a+b)^2 = (a+b)(a-b) - (a+b)^2$$
$$= (a+b)[a-b-(a+b)] = -2b(a+b);$$
$$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

36. Den fundne Regel for Multiplikation af flerleddede Størrelser anvendes, naar man multiplicerer Tal større end 10, idet et saadant Tal med Cifrene $a, b, c \ldots$ (fra højre mod venstre) har Værdien

$$a + b \,.\, 10 + c \,.\, 10^2 + \ldots$$

Ved Multiplikationen skrives da som sædvanlig de ensartede Led under hinanden, men Enhederne udelades. Skrives Enhederne f. Eks. i 73×31, vil Regningen se saaledes ud

$$\begin{array}{r} 7 \,.\, 10 + 3 \\ 3 \,.\, 10 + 1 \\ \hline 7 \,.\, 10 + 3 \\ 2 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^2 + 9 \,.\, 10 \quad \\ \hline 2 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10^2 + 6 \,.\, 10 + 3 \end{array} = 2263.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
3. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
4. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.
5. $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab(a^2+b^2)$.
6. $(a+2b-3c)(a+2b+3c) - (a+2b)^2 = -9c^2$.
7. $5a + 5b + ab + b^2$ opløses i Faktorer.
8. $4a^2 - 25b^2$ opløses i Faktorer.
9. $(x^2-3x+1)^2 = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$.
10. $a(a+2b)^2 - b(b+2a)^2 = a^3 - b^3$.
11. $(x-1)^3 - x(x-1)^2 + x(x-1) - x + 1 = 0$.
12. $(2x^2-3x+1)^2 - (2x^2-3x)^2 - 2x(2x-3) = 1$.
13. $(x^2y - y^2x)^2 - 2x^2y^2(x-y)^2 + xy(x^2+y^2)xy$
    $= 2x^3y^3$.
14. $2a - 3[a - 2(3a-2b) + 3(a-b)] = 8a - 3b$.
15. $(a+b)(b+c)(c+a) - (a-b)(b-c)(c-a)$
    $= 2(a^2b + b^2c + c^2a + abc)$.
16. Find Produktet af 5 paa hinanden følgende Tal i Talrækken, af hvilke det mellemste er a.
17. $\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + a\right)a - \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + b\right)b$ reduceres og opløses i Faktorer.

18. $(a^2 - 2ab - b^2)^2 - b^2(2a + b)^2 + 2a^2b(2a + b) = a^4$.

19. $\frac{b + c}{d} . a - \frac{a + b}{d} . c = \frac{b(a - c)}{d}$.

20. $ab - 2ac + 2b^2 + 2c^2 - 5bc$ opløses i Faktorer; $(-5bc = -4bc - bc)$.

21. Eks. 11 reduceres ved at sætte uden for Parentes.

22. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

23. $(a-b)(b-c)(c-a) - a^2(c-b) - b^2(a-c) - c^2(b-a) = 0$.

24. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1) - (x^4 + 1)^2 = -x^4$.

25. $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2 - 4x^3y = 4xy^3$.

26. $\frac{a + b}{c}(a + b) - \frac{a - b}{c}(a - b) - \frac{4ab - c}{c} = 1$.

27. $\frac{a + b - c}{a + b + c} c + \frac{a - b + c}{a + b + c} b - \frac{a - b - c}{a + b + c} a + \frac{(a - b + c)^2}{a + b + c}$
$$= \frac{4ac}{a + b + c}.$$

28. Hvad bliver $xy^2 - yx^2$, naar $x = a + b$, $y = a - b$?

29. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - (x^2 + 3x + 1)^2 = -1$.

30. $x^8 - 1$ opløses i Faktorer.

31. For hvilke Værdier af x er y positiv, Nul eller negativ, naar $y = (x - 9)(x - 3)$?

32. For hvilke Værdier af x er y positiv, Nul eller negativ, naar $y = (x - 9)(x - 3)(x - 1)$?

Divisjon.

37. At dividere et Tal a med et Tal b vil sige, at finde det Tal, som multipliceret med b giver a. a kaldes da Dividenden, b Divisor, det udkomne Kvotienten. «Divideret med» betegnes : .

Man har altsaa

$$a : b = c, \text{ dersom } cb = a. \qquad (1)$$

Man prøver derfor en Divisjons Rigtighed ved at undersøge om

Kvotienten × Divisor = Dividenden.

Dersom Kvotienten er et helt Tal, siger man, at Divisjonen gaar op eller at Divisor gaar op i Dividenden.

I en Række Størrelser med Tegnene . og : skal Regningen udføres fra venstre mod højre;

$$a : b . c : d : e$$

betegner altsaa, at a skal divideres med b, det udkomne multipliceres med c, det udkomne divideres med d, det udkomne med e.

Eks. $2 . 3 : 2 . 5 : 3 = 5$; $5 . 3 . 4 : 5 . 3 : 9 . 2 : 4 = 2$.

38. De to Ligninger (1) udsige altsaa det samme, blot under en forskellig Form. Heraf følger, at Dividenden (Multiplikanden) kan være et benævnt Tal; er Divisor da ubenævnt, faar Kvotienten den samme Benævnelse som Dividenden; ved Divisjonen deler man den benævnte Størrelse i saa mange lige store Dele, som Divisor angiver.

Eks. 10 ℔ : 2 = 5 ℔, thi 5 ℔ . 2 = 10 ℔;

$$8 \text{ Kr.} : 5 = \frac{8}{5} \text{ Kr.}$$

Dividend og Divisor kunne ogsaa være benævnte og maa da være ensbenævnte eller i alt Fald kunne gøres ensbenævnte. Kvotienten er da et ubenævnt Tal og siges at angive Forholdet mellem Dividend og Divisor, det vil sige det Antal Gange, Divisor indeholdes i Dividenden.

Eks. 10 ℔ : 5 ℔ = 2;

1 ℔ : 10 Kvint = 100 Kv. : 10 Kv. = 10.

Man maa her erindre, at vi, naar vi skrive $a . b$ ℔, egentlig mene a ℔ . b.

39. Af Ligningerne (1) ses, ved at man sætter lige store Størrelser i Stedet for hinanden, at

$$c \, . \, b : b = c; \; a : b \, . \, b = a,$$

der vise, at Multiplikation og Divisjon med samme Tal, udførte efter hinanden, hæve hinanden. Divisjon og Multiplikation kaldes derfor modsatte Regningsarter.

40. Kvotienten $a:b$ betegner det samme som Brøken $\frac{a}{b}$.

Man har

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ thi } \frac{a}{b} . b = a. \quad (26)$$

De to Betegnelser kunne altsaa bruges i Flæng.

Saaledes er $\frac{8}{4} = 8 : 4$; $\frac{5}{7} = 5 : 7$ o. s. v.

41. Kvotienten bliver positiv, naar Dividend og Divisor have ens, negativ, naar de have forskelligt Fortegn.

$$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}; \; \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}; \; \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \; \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

Man ser let ved at anvende Prøven, at disse Formler ere rigtige.

Da disse Regler ere de samme som de, vi fandt for Tegnene ved Multiplikation, kunne vi, naar vi have en Række af Faktorer og Divisorer, regne med Tallene for sig og med Fortegnene for sig; finde vi mellem disse — et ulige Antal Gange, bliver Resultatet negativt, ellers positivt.

Eks. $\frac{3 \, . \, 5}{3} = 5$; $\frac{6\,(-3)}{-9} = 2$;

$$(-3)\,(-4) : (-6) : 2 = -1;$$

$$(-1)\,(-1)\,(-1) : (-1) : (-1) : (-1) = 1;$$

$$\frac{a}{1} = a; \quad \frac{a}{-a} = -1; \quad \frac{am}{a} = m; \quad a^3 : a = a^2;$$

$$(-a^3b^2) : (ab) = -a^2b; \quad \frac{a-b}{b-a} = -1; \quad \frac{0}{a} = 0;$$

$$(-a) : (-b) . (-c) = -a : b . c;$$

$$(-a^5) : (-a) : (-a) : (-a) : (-a) = -a.$$

42. En Faktor og en Divisor, der følge efter hinanden, kunne ombyttes.

$a . b : c = a : c . b$, thi $a : c . b . c = a : c . c . b = ab$.

43. To Divisorer, der følge efter hinanden, kunne ombyttes.

$a : b : c = a : c : b$, thi $a : c : b . c = a : c . c : b = a : b$.

44. Ved efterhaanden at anvende disse to Sætninger kunne vi skrive en Række af Faktorer og Divisorer i en hvilken som helst Orden.

Eks. $a . b : c : d . e = a . b . e : c : d$; $a : b = 1 : b . a$.

I det sidste Eksempel have vi sat Faktoren 1 til, der altid kan tænkes underforstaaet.

45. I en Række af Faktorer og Divisorer kan man sætte eller bortkaste en Parentes efter Behag, naar blot Parentesen staar som Faktor (har Tegnet .).

Man ser nemlig let, at Sætningen er rigtig, naar Parentesen staar eller sættes om de første Faktorer og Divisorer. Da man nu kan bringe hvilke Faktorer og Divisorer, man vil, forrest, gælder Sætningen altid.

Eks. $a . b : c : d = a . (b : c : d)$, thi $a . b : c : d$
$= b : c : d . a = (b : c : d) a = a (b : c : d)$.

46. Dersom Parentesen staar som Divisor (har Tegnet :), kan man ogsaa sætte den eller bortkaste den efter Behag, naar man samtidig i Parentesen forandrer Tegnene (. til : og : til .).

Man behøver, idet man gaar frem som ovenfor, kun at bevise, at Sætningen gælder om de forreste Faktorer og Divisorer. Man har imidlertid

$$a:(b:c\,.\,d) = a:b\,.\,c:d,$$

thi $a:b\,.\,c:d\,.\,(b:c\,.\,d) = a:b\,.\,c:d\,.\,b:c\,.\,d = a,$ et Bevis, der let ses at gælde, hvor mange Faktorer og Divisorer der end findes i Parentesen.

47. Man tør dog kun bruge de her beviste Sætninger saaledes, at man ikke ved at sætte en Parentes faar en brudden Divisor eller Multiplikator, da en saadan, efter vore Definitioner, ikke har nogen Betydning. Det ligger da nær, at man for at undgaa denne Indskrænkning vedtager, at man ved Multiplikation med en Brøk vil forstaa Multiplikation med Tælleren og Divisjon med Nævneren; derved kommer det hidtil (naar c ikke gaar op i b) meningsløse Udtryk $a\,.\,(b:c)$ til at betegne det samme som $a\,.\,b:c$, saa at Parentesen ogsaa i dette Tilfælde kan sættes.

Divisjon med en Brøk har nu ogsaa Betydning og betegner Multiplikation med den omvendte Brøk:

$$a:\frac{b}{c} = a\,.\,\frac{c}{b}, \text{ da } a\,.\,\frac{c}{b}\,.\,\frac{b}{c} = a\,.\,c:b\,.\,b:c = a.$$

Tillige ser man, at Produktet af en Brøk og den omvendte Brøk er 1; $\frac{a}{b}\,.\,\frac{b}{a} = a:b\,.\,b:a = 1.$

Ved denne Definition af en brudden Multiplikator falder nu den ovenfor nævnte Indskrænkning bort, og alle de beviste Sætninger gælde almindelig for en hvilken som helst Række af Faktorer og Divisorer, hvad enten disse ere hele Tal eller Brøker. Saaledes er f. Eks.

Faktorernes Orden ogsaa vilkaarlig, naar de ere Brøker, thi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a:b \,.\, c:d = c:d \,.\, a:b = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

I de her beviste Sætninger er en Mængde specielle Sætninger indbefattet; vi ville nævne de vigtigste.

48. En Brøks Værdi forandres ikke, naar dens Tæller og Nævner multipliceres eller divideres med samme Tal.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \quad \text{thi } am:(bm) = am:b:m = a:b.$$

En Brøk forkortes, naar dens Tæller og Nævner divideres med samme Tal; kan Brøken ikke forkortes, siges den at være bragt paa sin simpleste Benævning.

Eks. $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$; $\frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}$; $\frac{a^3b^2}{5a^4b} = \frac{b}{5a}$;

$$\frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Foreløbig maa vi for om muligt at forkorte en Brøk forsøge paa at opløse Tælleren og Nævneren i Faktorer, for derpaa at bortdividere de fælles Faktorer.

En Brøk kan omformes til en anden med en hvilken som helst Nævner, i hvilken den givne Nævner gaar op.

Har Brøken Nævneren a, og ønske vi at skaffe den Nævneren ab, multipliceres Tæller og Nævner med b.

Eks. $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} = \frac{a^2 + ab}{ab + b^2}$ o. s. v.;

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)};$$

$$\frac{ab+ac}{mb+mc} = \frac{a(b+c)}{m(b+c)} = \frac{a}{m};$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5};$$

$$\frac{a^2 - b^2}{ma + mb} = \frac{a - b}{m}.$$

49. **To Brøker multipliceres ved, at man multiplicerer Tællerne for sig og Nævnerne for sig.**

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, thi $a:b.(c:d) = a:b.c:d = a.c:(b.d)$.

Da $\frac{ac}{bd}$ kan forkortes med ethvert Tal, der gaar op i a eller c og tillige i b eller d, dividerer man, før Multiplikationen udføres, ikke alene a og b, c og d, men om muligt a og d, b og c med samme Tal; man kalder dette sidste at forkorte over Kors. Dersom den ene Faktor er et helt Tal, skrives den som en Brøk med Nævneren 1, og man gaar frem paa samme Maade. Da man, i Stedet for at dividere med en Brøk, multiplicerer med den omvendte Brøk, behøves der ingen særlige Regler for Divisjon.

Eks. $$\frac{16}{25} \cdot \frac{15}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{5};$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{bc}{ad} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^3} : \frac{(a-b)^3}{a+b} = \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^3} \cdot \frac{a+b}{(a-b)^3}$$

$$= \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(a-b)^2} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{(a+b)(a-b)^2}.$$

Særlig mærkes:

Dersom en Brøk skal multipliceres med et helt Tal, i hvilket dens Nævner gaar op, divideres Nævneren i det hele Tal, og med Kvotienten multipliceres Tælleren.

$$\frac{a}{b} . bc = a . (bc) : b = a(bc : b) = ac.$$

En Brøk divideres med et helt Tal, idet man dividerer Tælleren eller multiplicerer Nævneren med Tallet.

$$\frac{a}{b} : c = a : b : c = a : (bc) = \frac{a}{bc};$$

$$\frac{ab}{c} : b = ab : c : b = \frac{a}{c}.$$

Flere særlige Tilfælde er det unødvendigt at fremhæve. Vi skulle nu give nogle Eksempler paa Anvendelsen af den almindelige Sætning.

$$a : (b . c : (d : e)) = a : b : c . d : e = ad : (bce);$$

$$a : b : [a : b : (a . c : b) . a] = a : b : a . b . a . c : b : a = c : b;$$

$$\frac{a . \frac{b}{c} : d}{b . \frac{cd}{a} : a} = a . b : c : d : (b . c . d : a : a)$$

$$= a . b : c : d : b : c : d . a^2 = a^3 : c^2 : d^2.$$

50. En flerleddet Størrelse divideres ved, at man dividerer hvert Led for sig.

$$\frac{a + b - c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d},$$

thi $$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}\right)d = a + b - c.$$

Heraf følger, at Sætningen i 25. ogsaa gælder for en brudden Multiplikator.

$$(a + b - c)\frac{d}{e} = (a + b - c)d : e = (ad + bd - cd) : e$$

$$= a . \frac{d}{e} + b . \frac{d}{e} - c . \frac{d}{e}.$$

51. **Brøkers Addition.** Vi have lært, hvorledes Brøker adderes og subtraheres, naar de have samme Nævner. Dersom de ikke have samme Nævner, omskrives

de, saa at de faa samme Nævner, hvorpaa Additionerne og Subtraktionerne udføres. Den Nævner, vi skaffe alle Brøkerne, kaldes Generalnævneren. Det maa være en Størrelse, i hvilken alle Nævnerne gaa op; man kan derfor til Generalnævner benytte Nævnernes Produkt, men man kan ofte benytte et mindre Tal. Senere lære vi, hvorledes den simpleste Generalnævner findes; men foreløbig maa vi søge at komme til den ved Betragtning af Nævnernes Faktorer. Disse maa alle findes i Generalnævneren; men dersom den samme Faktor findes i flere Nævnere, behøver man kun at tage den een Gang med i Generalnævneren. Ere saaledes Nævnerne ab, ac og bc, bliver Generalnævneren abc; ere Nævnerne a^2b og ab^2, bliver Generalnævneren a^2b^2, o. s. v.

Saa snart Generalnævneren er funden, divideres den med enhver af Nævnerne, og med Kvotienten multipliceres Brøkens Tæller og Nævner.

Generalnævneren holdes opløst i Faktorer, da Divisjonen med Nævnerne derved lettes.

Eks. Nævnere	Generalnævner
$ab,\ abc,\ a^2b,\ b^2$	a^2b^2c;
$(a+b)^2,\ a^2-b^2$	$(a+b)^2(a-b)$;
$a-b,\ b-c,\ c-a$	$(a-b)(b-c)(c-a)$;
$a+b,\ a-b,\ a^2-b^2$	a^2-b^2;
$6a,\ 4a^2b,\ 3ab^2,\ a+b$	$12a^2b^2(a+b)$;

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{12}{20}-\frac{10}{20}+\frac{15}{20}=\frac{17}{20};$$

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}-\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{1-b+a}{ab};$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a}{5} - \frac{a-b}{3} + \frac{2b-a}{2} = \frac{6a}{30} - \frac{10a-10b}{30} + \frac{30b-15a}{30}$$
$$= \frac{40b-19a}{30};$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$$
$$= \frac{(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) - (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$\frac{1}{6a} - \frac{a^2+b^2}{4a^2b} + \frac{a^2-b^2}{3ab^2} - \frac{2}{a+b}$$
$$= \frac{4a^4 + a^3b - 29a^2b^2 - 5ab^3 - 3b^4}{12a^2b^2(a+b)}.$$

52. En Sum af et helt Tal og en Brøk kaldes et blandet Tal. Da det hele Tal kan skrives som en Brøk med Nævneren 1, kan et blandet Tal omskrives til en Brøk, og omvendt kan en Brøk omskrives ved, at Divisjonen udføres i de Led, hvor den gaar op.

Eks. $3\frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5} = \frac{15}{5} + \frac{1}{5} = \frac{16}{5};$

$$7\frac{9}{11} = \frac{7 \,.\, 11 + 9}{11} = \frac{86}{11}; \quad a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c};$$

$$a - \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a} = \frac{b^2}{a};$$

$$\frac{31}{7} = \frac{28+3}{7} = 4\frac{3}{7}; \quad \frac{a^2+ab+c}{a} = a + b + \frac{c}{a}.$$

53. En Brøk, i hvis Tæller og Nævner der atter findes Brøker, kaldes en Brøks Brøk; ved at multiplicere dens Tæller og Nævner med Smaabrøkernes Generalnævner bringer man den paa simpel Brøks Form (49). For at udføre andre

Regninger med blandede Tal trækker man dem i Reglen først sammen til Brøker.

Eks.

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}{a-\frac{c}{b}}=\frac{a+c}{ab-c};\quad \frac{1+\frac{a+b}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b}-1}=\frac{a-b+a+b}{a+b-(a-b)}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x+y-(x-y)}=\frac{x^2+y^2}{y};$$

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b}=2;$$

$$\left(x-\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)$$

$$=\frac{-xy-y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x+y}=-y.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $\frac{b-a}{x-b}-\frac{a-2b}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}.$

2. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b};\quad \frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}.$

3. $\frac{a}{2a-2b}+\frac{b}{2b-2a};\quad \frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2b-2a}.$

4. $\frac{2}{x}-\frac{3}{2x-1}+\frac{x-4}{2x^2-x};\quad \frac{2}{x}+\frac{3}{2x-1}-\frac{x-4}{2x^2-x}.$

5. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}.$

6. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)-\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right).$

7. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}.$

8. $\frac{3}{1-2x}-\frac{7}{1+2x}-\frac{4-20x}{4x^2-1}$.

9. $\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

10. $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

11. $\frac{(a+b)^2}{x(a-b)}\cdot\frac{(a-b)^2}{x^2(a+b)}\cdot\frac{2x^2}{a^2-b^2}:\frac{2}{x}$.

12. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}:\frac{xy(x+y)}{x^2-y^2}\cdot\left(1+\frac{2y}{x+y}\cdot\frac{y}{x-y}\right)$.

13. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ac}{(b+c)(b-a)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$.

14. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

15. $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\left(\frac{1}{2}:\frac{y}{x}+1\right)$.

16. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right):\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

17. $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{1-\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}$.   18. $\dfrac{\frac{a+b}{c+d}+\frac{a-b}{c-d}}{\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}}$.

19. $\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c+1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}-\frac{3abc}{bc+ca-ab}$.

20. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$.

21. $x-1-\cfrac{x+1}{x-1+\cfrac{x+1}{x-1-\cfrac{1}{x}}}$.

22. $\dfrac{2ax - a + 10x - 5}{a - 2ax - 10x + 5}$ forkortes.

23. $\dfrac{a^2 - b^2 - ac + bc}{ab + ac + b^2 - c^2}$ forkortes.

24. $\left(1 - \dfrac{a}{b}\right)\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) : \left(1 - \dfrac{b}{a}\right) : \left(1 + \dfrac{a}{b}\right).$

25. $\left[\dfrac{a+b}{a-b}\left(1 - \dfrac{a}{b}\right) - \dfrac{a-b}{a+b}\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) + \dfrac{2a}{b}\right] : \dfrac{a-b}{ab}.$

26. $3\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{2}\,(1\frac{1}{3}x - 1\frac{3}{5}) + \frac{5}{8}\left(\dfrac{3x}{2} - 8\right).$

27. $\dfrac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)\left(1 - \dfrac{a}{b}\right)\left(1 + \dfrac{a^2}{b^2}\right)}.$

28. $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{1}{x^2 - 8x + 15}.$

29. $\dfrac{1}{am + an - bm - bn} - \dfrac{1}{am - an - bm + bn}.$

30. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1 - x}.$

---

54. **Polynomiers Division.** Et Polynomium skrives i Almindelighed saaledes, at det er ordnet efter stigende eller faldende (aftagende) Potenser af et af de forekommende Bogstaver. Dersom man f. Eks. vil ordne et Polynomium efter Bogstavet x med stigende Potenser, skriver man først de Led, der ikke indeholde x, derpaa de Led, der indeholde x (hvilke kunne sammentrækkes til eet, idet x sættes udenfor en Parentes), derpaa de Led, der indeholde x^2 (hvilke ligeledes kunne sammentrækkes), o. s. v. Tager man Leddene i omvendt Orden, er Polynomiet ordnet efter faldende Potenser. Dersom den højeste Potens af x, der forekommer, er x^n, siges Polynomiet at være af n^{te} Grad med Hensyn til x.

Et Polynomium kaldes homogent af n^{te}Grad med Hensyn til visse Bogstaver a, b, c..., dersom der i hvert af Polynomiets Led findes n af disse som Faktorer.

Eks. $a + bx^3 - cx^2 + 7x^3 + 5 + ax + b - x^2$ er af 3dje Grad m. H. t. x og ordnes til

$$(b + 7)x^3 - (c + 1)x^2 + ax + a + b + 5$$

eller $5 + a + b + ax - (c + 1)x^2 + (b + 7)x^3$.

$a^2 + 3ab + 2b^2$ er homogent af 2den Grad m. H. t. a og b.

$2a^3 + 5a^2b - 7ab^2 - b^3$ er homogent af 3dje Grad m. H. t. a og b.

Skal et Polynomium d divideres i et andet D, ordnes de begge efter faldende Potenser af det samme Bogstav. Tænkes den søgte Kvotient ordnet paa samme Maade, maa første Led af Kvotienten, multipliceret med første Led af Divisor, give første Led af Dividenden; omvendt findes altsaa første Led af Kvotienten, naar første Led af Divisor divideres i første Led af Dividenden. Med det fundne Led multipliceres Divisor, og Produktet D_1 trækkes fra Dividenden. Kaldes Resten D_2, har man altsaa $D = D_1 + D_2$ og derfor

$$\frac{D}{d} = \frac{D_1}{d} + \frac{D_2}{d}.$$

Det fundne Led er altsaa $\frac{D_1}{d}$, og vi have saaledes tilbage at dividere Resten D_2 med d for at finde de manglende Led af Kvotienten; D_2 er af lavere Grad end D og giver, idet man fortsætter paa samme Maade, efterhaanden Kvotientens Led. Dersom man i Løbet af Regningen kommer til en Rest D_n, der er af lavere Grad end Divisor, gaar Divisjonen ikke op, og man maa til de fundne Led (den ufuldstændige Kvotient) føje Brøken $\frac{D_n}{d}$.

Eks.

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2 (= d) \big) \; a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 (= D) \big(a^2 - 2ab + b^2 \\
\qquad\qquad \underline{-a^4 \mp 2a^3b \pm a^2b^2 \qquad\qquad (= a^2d)} \\
\qquad\qquad -2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 (= D_2) \\
\qquad\qquad \underline{\mp 2a^3b \pm 4a^2b^2 \mp 2ab^3 \qquad (= -2abd)} \\
\qquad\qquad\qquad a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 (= b^2d)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Man ser her, hvorledes Regningen udføres. d og D ere ordnede efter faldende Potenser af a; a^3 divideres i a^4 og giver det første Led (a^2) af Kvotienten. d multipliceres med a^2, og Produktet adderes til D med forandrede Fortegn (de nederste Fortegn); a^2 divideres derpaa i $-2a^3b$ og giver det næste Led $(-2ab)$ af Kvotienten o. s. v. Til sidst faas Resten 0, og Kvotienten er funden at være $a^2 - 2ab + b^2$.

Som et andet Eksempel ville vi tage

$$d = ab + 1 + ac,$$

$$D = a^3c + 2ab + a^2bc + a^2b^2 + ac + a^3b + a^2 + b.$$

Ordne vi efter a, ser Regningen saaledes ud

$$
\begin{array}{l}
a(b+c)+1 \big) \; a^3(b+c) + a^2(b^2+bc+1) + a(2b+c) + b \big(a^2 + ab + 1 \\
\qquad \underline{-a^3(b+c) \pm a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad a^2(b^2+bc) + a(2b+c) + b \\
\qquad\qquad\quad \underline{-a^2(b^2+bc) \pm ab \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a(b+c) + b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a(b+c) + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b - 1
\end{array}
$$

Kvotienten er altsaa $a^2 + ab + 1 + \dfrac{b-1}{ab+ac+1}$.

Den her udviklede Metode er den, som anvendes ved Divisjon af Tal. Disse skrives nemlig i Titalsystemet som Polynomier, ordnede efter faldende Potenser af 10; man finder ved Divisjonen eet Ciffer ad Gangen; men dette bestemmes paa en noget anden Maade end ved Bogstavstørrelser, da Dividendens første Led foruden Produktet af Divisors og Kvotientens første Led tillige i Almindelighed indeholder den saakaldte Mente.

Eks. $$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2;$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2; \quad \frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3;$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3;$$

$$\frac{(x^2 + 3x)^2 + 2x(x + 3)}{x^2 + 3x + 2} = x^2 + 3x.$$

55. Dersom et Polynomium (ordnet efter x) bliver Nul, naar man for x sætter en vis Størrelse a, gaar $x - a$ op i Polynomiet.

Lad P betegne Polynomiet. Dersom $x - a$ ikke gaar op i det, kan man fortsætte Divisjonen, til man faar en Rest A, der ikke indeholder x. Er Q Kvotienten, har man da

$$\frac{P}{x - a} = Q + \frac{A}{x - a} \text{ eller } P = Q(x - a) + A,$$

idet Ligningen maa vedblive at være rigtig, naar alle Leddene multipliceres med $x - a$. Da denne Ligning gælder for alle Værdier af x, gælder den ogsaa, naar man for x sætter a; derved bliver P ifølge det givne til 0; $Q(x - a)$ bliver ogsaa 0, medens A ikke indeholder x og derfor ikke forandres. Man har altsaa $A = 0$; men naar Resten er 0, gaar Divisjonen op.

Eks. $x - 1$ gaar op i $x^4 - 1$, thi $x^4 - 1$ bliver 0 for $x = 1$. $x - a$ gaar op i $x^n - a^n$, thi $x^n - a^n$ bliver 0 for $x = a$.

Ved Udførelse af Divisjonen faar man

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 \ldots\ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

$x + a$ gaar op i $x^n + a^n$, naar n er et ulige Tal, thi $x^n + a^n$ bliver da 0 for $x = -a$.

Divisjonen giver

$$(n \text{ ulige}) \frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 \ldots - xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

$x + a$ gaar op i $x^n - a^n$, naar n er et lige Tal, thi $x^n - a^n$ bliver da 0 for $x = -a$.

Divisjonen giver

$$(n \text{ lige}) \frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 \ldots + xa^{n-2} - a^{n-1}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $(27x^3 + 8y^3) : (3x + 2y)$.
2. $(a^3 - 2ab^2 + b^3) : (a - b)$.
3. $(x^3 - 7x - 6) : (x - 3)$.
4. $(x^6 - 2x^3 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$.
5. $(a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4) : (a^2 + 2ab + 3b^2)$.
6. $(a^4 - 15b^4 + a^3b + 19ab^3 - 8a^2b^2) : (3ab - 5b^2 + a^2)$.
7. $(x^3 - 12x + 16)(x^3 - 12x - 16) : (x^2 - 16)$.
8. $(a^3 - bc^2 - b^2c + a^2b + ac(a - b)) : (a^2 - bc)$.
9. $(a^2 - 3ab + b^2)^2 : (a^2 - 1 - 3ab + b^2)$. **(Rest 1).**
10. $\dfrac{b(x^3 + a^3) + xa(x^2 - a^2) + a^3(x + a)}{ax + ab + a^2 + bx}$.
11. $\dfrac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{(a + b)^2 + (a - b)^2}$.

Potens.

56. Vi have vedtaget at skrive

$$a\,.\,a\,.\,a\ldots(m\text{ G.}) = a^m.$$

a^m læses «a i m^{te} Potens». a kaldes **Roden**, m **Potenseksponenten**, a^m **Potensen**. **At opløfte et Tal til Potens er altsaa at sætte det saa mange Gange som Faktor, som Eksponenten angiver.** Eksponenten maa derfor være et positivt, helt Tal.

Eks. $0^m = 0$; $1^m = 1$; $3^3 = 27$; $2^{10} = 1024$; $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$; $(-a)^5 = -a^5$ o. s. v.

57. **En Potens med lige Eksponent er positiv; en Potens med ulige Eksponent er positiv, naar Roden er positiv, negativ, naar Roden er negativ.**

Disse Sætninger ere en simpel Følge af 22.

Et lige Tal kan betegnes ved $2n$, et ulige ved $2n+1$, idet n er et vilkaarligt helt Tal; man har altsaa

$(+a)^n = +a^n$; $(-a)^{2n} = a^{2n}$; $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

58. **Divisjon af Potenser af samme Tal.** Skal a^m divideres med a^p, er der tre mulige Tilfælde:

1. $m > p$; $\frac{a^m}{a^p} = \frac{a.a.a\ldots(m\text{ G.})}{a.a.a\ldots(p\text{ G.})} = a.a.a\ldots(m-p\text{ G.})$
$= a^{m-p}$.

2. $m = p$; $\frac{a^m}{a^p} = 1$.

3. $m < p$; $\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}$.

Man har altsaa tre forskellige Regler at anvende, efter som $m \gtreqless p$. Dersom man anvender den første Regel i de to andre Tilfælde, faar man ikke urigtige, men meningsløse Resultater, f. Eks.

$$\frac{a^4}{a^4} = a^0;\ \frac{a^4}{a^7} = a^{-3},$$

der ere meningsløse, da a^0 og a^{-3} intet betyde; de meningsløse Resultater vise altsaa, at man ikke har brugt den rigtige Regel. Dersom man har $\frac{a^m}{a^{m+n}}$, skal Resultatet være $\frac{1}{a^n}$, men bliver ved den første Regel a^{-n}; man kan derfor bruge den første Regel ogsaa i det sidste Tilfælde, dersom man vedtager, at a^{-n} herefter skal betyde $\frac{1}{a^n}$. a^{-n} har dog Betydning, naar n betyder et negativt Tal, men i dette Tilfælde stemmer den ny Vedtægt med den oprindelige Definition, idet

$$a^{-(-p)} = \frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)} = a^p.$$

Paa samme Maade se vi, at vi ved at vedtage, at a^0 skal betyde 1, opnaa, at den første Regel ogsaa kan bruges i det andet Tilfælde.

Vi vedtage altsaa ved a^0 at forstaa 1 og ved a^{-n} at forstaa $\frac{1}{a^n}$. Vi opnaa derved, at:

To Potenser af samme Tal divideres ved, at man trækker Divisors Eksponent fra Dividendens, medens Roden lades uforandret.

En Faktor kan flyttes fra Nævneren af en Brøk til Tælleren og omvendt, naar samtidig Eksponentens Fortegn forandres.

$$\frac{a^{-n}b}{c} = \frac{1 : a^n . b}{c} = \frac{b}{a^n c}; \quad \frac{b}{a^{-n}c} = \frac{b}{1 : a^n . c} = \frac{a^n b}{c}.$$

59. Man multiplicerer to Potenser af samme Tal ved at addere Eksponenterne.

$$a^m . a^p = a . a . a \ldots (m \text{ G.}) . a . a . a \ldots (p \text{ G.})$$
$$= a . a . a \ldots (m + p \text{ G.}) = a^{m+p}.$$

Sætningerne i 58 og 59 gælde ogsaa, naar Potenserne have negative Eksponenter.

$$a^m \,.\, a^{-p} = a^m \,.\, \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p};$$

$$a^{-m} \,.\, a^{-p} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{m+p}} = a^{-(m+p)};$$

$$\frac{a^m}{a^{-p}} = a^m \,.\, a^p = a^{m+p}; \quad \frac{a^{-m}}{a^p} = a^{-m} \,.\, a^{-p} = a^{-(m+p)};$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-p}} = a^{-m} \,.\, a^p = a^{p-m}.$$

60. **Man opløfter et Produkt til en Potens ved at opløfte hver Faktor for sig.**

$$(ab)^m = (ab)\,(ab)\ldots(m\,\text{G.}) = aa\ldots(m\,\text{G.})\,.\,bb\ldots(m\,\text{G.}) = a^m b^m;$$

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \,.\, b^{-m}.$$

61. **Man opløfter en Brøk til en Potens ved at opløfte Tæller for sig og Nævner for sig.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (m\ \text{G.}) = \frac{a\,.\,a\ldots(m\ \text{G.})}{b\,.\,b\ldots(m\ \text{G.})} = \frac{a^m}{b^m};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^m}\right)} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

62. **En Brøk kan vendes om, naar samtidig dens Potenseksponents Fortegn forandres.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

63. **Man opløfter en Potens til en ny Potens ved at multiplicere Eksponenterne.**

$$(a^m)^p = a^m \,.\, a^m \ldots (p\ \text{G.}) = a^{m+m\ldots(p\,\text{G.})} = a^{mp};$$

$$(a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p} = \frac{1}{a^{mp}} = a^{-mp}.$$

Eks. $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $(a+b)^{-2} = \dfrac{1}{(a+b)^2}$;

$a^m \,.\, a^n : a^p = a^{m+n-p}$; $a^{-5} \,.\, a^{-3} \,.\, a^8 = a^0 = 1$;

$(a^3b^{-2})^2 = a^6b^{-4}$; $(-3a^2b^{-3})^2 = 9a^4b^{-6}$;

$$\left(\frac{a^2b}{ca^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{a^5b}{c}\right)^2 = \frac{a^{10}b^2}{c^2};$$

$$\left(\frac{a^3b}{c^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{ab^2}{c}\right)^4 = \frac{a^{-6}b^{-2}}{c^{-4}} \cdot \frac{a^4b^8}{c^4} = \frac{b^6}{a^2};$$

$$\left(\frac{2a^3b}{3c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3a}{bc^{-1}}\right)^{-2} : \left(\frac{2a^2b^{-3}}{c}\right)^3$$

$$= \frac{4a^6b^2}{9c^2} \cdot \frac{3^{-2}a^{-2}}{b^{-2}c^2} \cdot \frac{c^3}{8a^6b^{-9}} = \frac{b^{13}}{162a^2c}.$$

64. **Naar en Brøk opløftes til højere og højere Potenser, bliver Resultatet større og større, dersom Brøken er uægte, men mindre og mindre, dersom Brøken er ægte.**

Af $\frac{a}{b} \gtrless 1$ følger nemlig ved Multiplikation med $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \gtrless \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

idet større og mindre, multipliceret med lige stort, maa give større og mindre.

Eksempler til Øvelse.

1. $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$. 2. $\frac{a^{x-1}}{a^{1-x}} a^{2-x}$. 3. $a^{m+1} . b^{1-m} : a^{2+m} : b^{2-m}$.

4. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1}b^{n+2}}{9a^{n+5}c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$.

5. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$.

6. $(3a^2b^3 - 2a^4c^2 + ab^{-4} - (\frac{1}{2})^{-1}a^{-2}b^2) : 2a^3b^{-2}c^2$.

7. $(a^2x^{-4})^3 . (2a^{-1}x^3)^2 : (2ax^{-2})^2 : \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}\left(\frac{a^2}{x}\right)^{-1}\right]^{-2}$.

8. $(-2a^{-1})^{-2} . (-3a^{-2})^{-1} : (-a^{-3})^2$.

9. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right) : \left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$.

10. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$.

Ligninger af første Grad med een ubekendt.

65. De Ligninger, vi hidtil have beskæftiget os med, have været rigtige for alle Værdier af de deri forekommende Bogstaver. Saadanne Ligninger kaldes Identiteter eller Formler. Saaledes gælder f. Eks. Ligningen $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, hvilke Tal man end indsætter for a og b.

I Modsætning hertil skulle vi nu betragte Ligninger, som kun ere rigtige, naar der tillægges et af de forekommende Bogstaver en bestemt Værdi. At finde denne Værdi kaldes at løse Ligningen, og Værdien kaldes Ligningens Rod, medens det Bogstav, der betegner den, kaldes den ubekendte. Den ubekendte betegnes i Reglen med Bogstavet x, og x maa altsaa i Ligningen kun tænkes at betyde et saadant Tal, for hvilket Ligningen er identisk. Man gør Prøve ved at indsætte den fundne Værdi i Ligningen i Stedet for x; dersom man derved faar en Identitet, siges Ligningen at være tilfredsstillet af den fundne Værdi.

Saaledes vil Ligningen

$$x + 2 = 7$$

kun blive rigtig, dersom vi tillægge x Værdien 5. 5 er altsaa Ligningens Rod; ved at sætte 5 i Stedet for x faar man Identiteten $5 + 2 = 7$, saa at 5 tilfredsstiller Ligningen.

66. En rigtig Ligning maa vedblive at være rigtig, naar man udfører de samme Regninger med de Størrelser, der staa paa begge Sider af Lighedstegnet. Ligningens Løsning bestaar nu deri, at man efterhaanden udfører saadanne Regninger, indtil man af den givne Ligning har dannet en ny, der paa den ene Side af

Lighedstegnet har x, medens der paa den anden Side staar lutter bekendte Størrelser. For at opnaa dette gaar man frem paa følgende Maade:

1. Man bortskaffer Parenteserne ved at udføre de forlangte Regninger. (Undertiden ved at udføre de modsatte Regninger; af $3(x - 2) = 12$ faas f. Eks. $x - 2 = 4$).

2. Man bortskaffer Brøkerne ved at multiplicere paa begge Sider af Lighedstegnet med Brøkernes Generalnævner. Ligningen siges nu at være bragt paa hel Form.

Det er undertiden lettest at anvende denne Regel før den første. Ved dens Anvendelse maa man erindre, at Brøkstregen har samme Betydning som en Parentes, saa at Fortegnene for Tællerens Led forandres, dersom Brøken har Fortegnet —.

3. Ligningen ordnes. Ordningen bestaar i, at man samler de Led, der indeholde x, de Led, der indeholde x^2, o. s. v. Dersom den højeste Potens af x, der nu forekommer i Ligningen, er x^n, siges Ligningen at være af n^{te} Grad. Her beskæftige vi os kun med Ligninger af første Grad. Disse ordnes ved, at man paa den ene Side af Lighedstegnet samler de Led, der indeholde x, paa den anden Side de Led, der ikke indeholde x; dette opnaas let, idet man kan flytte et Led fra den ene Side af Lighedstegnet til den anden, naar man samtidig forandrer dets Fortegn. Har man nemlig

$$a + b = c,$$

faar man ved at subtrahere b paa begge Sider

$$a = c - b.$$

4. Leddene sammentrækkes. Dersom x

staar multipliceret med Bogstavfaktorer, sættes x uden for en Parentes, og man har da i Parentesen kun bekendte Størrelser. Paa den ene Side af Lighedstegnet have vi nu x med en bekendt Koefficient (der kan være en Parentes), paa den anden Side have vi lutter bekendte Størrelser.

Dersom alle Leddene hæve hverandre, er Ligningen identisk og er altsaa rigtig for alle Værdier af x. Dersom de Led, der indeholde x, hæve hinanden, medens de andre Led ikke hæve hinanden, er Opgaven meningsløs.

5. Man dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med Koefficienten til x, og Ligningen er løst, thi vi have nu x lig med en bekendt Størrelse.

6. Prøve gøres, idet man i den givne Ligning for x indsætter den fundne Rod. Ved Prøven gaar man ikke frem som ved Ligningens Løsning, for ikke at være udsat for at begaa de samme Fejl.

Eks. $(x - 1) - (2x - 3) + 3(x - 2) = 6;$

$$x - 1 - 2x + 3 + 3x - 6 = 6;$$

$$x - 2x + 3x = 6 + 1 - 3 + 6;$$

$2x = 10$, $x = 5$, som indsat i Ligningen giver

$$5 - 1 - (10 - 3) + 3 . 3 = 6 \text{ eller } 4 - 7 + 9 = 6.$$

$$\frac{x}{a} - \frac{x - a}{b} = \frac{b}{a};$$

$$bx - a(x - a) = b^2; \quad bx - ax + a^2 = b^2;$$

$$bx - ax = b^2 - a^2; \quad x(b - a) = b^2 - a^2;$$

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a. \quad \frac{b + a}{a} - 1 = \frac{b}{a}.$$

$$3 \cdot \frac{x-1}{2} - 2 \cdot \frac{2x-3}{5} = x - \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x-3}{2} - \frac{4x-6}{5} = x - \frac{1}{2};$$

$$15x - 15 - 8x + 12 = 10x - 5; \quad x = \tfrac{2}{3}.$$

$$\frac{2(3-4x)}{3-x} + \frac{3}{1-x} = 8;$$

$$(6-8x)(1-x) + 3(3-x) = 8(3-x)(1-x);$$

$$6 - 14x + 8x^2 + 9 - 3x = 24 - 32x + 8x^2;$$

$$8x^2 - 8x^2 + 32x - 14x - 3x = 24 - 6 - 9; \quad x = \tfrac{3}{5}.$$

$$\frac{c}{a+b} \cdot \frac{x+c}{x-a} + 1 = \frac{b}{x-a};$$

$$c(x+c) + (a+b)(x-a) = b(a+b);$$

$$cx + c^2 + ax + bx - a(a+b) = b(a+b);$$

$$x(a+b+c) = a(a+b) + b(a+b) - c^2 = (a+b)^2 - c^2;$$

$$x = \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c} = a + b - c.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $3x + 5 - (5x - 2) = 2(x - 1) - 4(\tfrac{5}{4}x - 2).$
2. $5(5x - 6) - 4(4x - 5) + 3(3x - 2) - 2x - 16 = 0.$
3. $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 1 - \tfrac{2}{3}x.$ 4. $\frac{x}{2} - \frac{5x+4}{3} = \frac{4x-9}{3}.$
5. $\frac{2x-5}{3} + x = \frac{3x-2}{5} + 3.$ 6. $\frac{2x}{a-2b} = 3 + \frac{x}{2a-b}.$
7. $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 36.$
8. $\frac{a}{bx} - \frac{b}{ax} = a^2 - b^2.$ 9. $\frac{a-b}{x-c} = \frac{a+b}{x+2c}.$

10. $\frac{x}{8} - \frac{x-1}{2\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{15} + \frac{x}{12}.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{7}{3}.$ 12. $ax + b = \frac{x}{a} + \frac{1}{b}.$

13. $\frac{x}{7} - \frac{x-5}{11} + 5 = x - \left(\frac{2x}{77} + 1\right).$

14. $(x + \frac{5}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x + 5)(x - 3) + \frac{3}{4} = 0.$

15. $(x + 1)^2 = x(6 - (1 - x)) - 2.$

16. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{c} + \frac{x-c}{a} = \frac{x-(a+b+c)}{abc}.$

17. $(a + x)(b + x) - a(b + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$

18. $\frac{a+b}{x-c} = \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b}.$

19. $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-16} = \frac{2x-1}{5}.$

20. $\frac{6x+7}{15} - \frac{2x-2}{7x-6} = \frac{2x+1}{5}.$

21. $\frac{x}{6} - 8\frac{3}{5} = 2\left(\frac{3x}{5} - 1\right) - \frac{x+8}{3} + 1\frac{2}{3}.$

22. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-8}.$

23. $\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{3x-1}.$

24. $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} = \frac{ax+b}{px+q}.$

25. $\frac{a}{c} - \frac{ax}{cx-1} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{ax-1}.$

26. $\frac{a(3-2x)}{b} + \frac{b(3x-2)}{a} - \frac{a-bx}{2(a+b)} = 2.$

27. $\frac{a^2+b^2}{b}(x-a) - \frac{a^2-b^2}{a}(x-b) = 2a(2a+b-x).$

28. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{3x}{a+b+c}=0.$

29. $x^2 = 9.$ **30.** $x^2 + 2x + 1 = 16.$

67. Dersom Opgaven er given i Ord, maa man selv sætte den i Ligning. Man betegner da den søgte Størrelse ved x og udtrykker det, som er givet i Opgaven, ved de matematiske Tegn. Dersom Opgaven omtaler flere ubekendte Størrelser, kalde vi en af dem x og udlede deraf Betegnelser for de andre.

Eks. 1500 Kr. skulle deles mellem A., B. og C., saa at A. faar dobbelt saa meget som B. og B. 100 Kr. mere end C.; hvor meget faar hver?

Kalde vi det Antal Kroner, som C. faar, for x, faar B. $x + 100$ og A. $2(x + 100)$; da disse Summer tilsammen udgøre den hele Sum, der skal deles, har man

$$x + (x + 100) + 2(x + 100) = 1500; \; x = 300.$$

C. faar altsaa 300 Kr., B. 400 Kr. og A. 800 Kr.

En Mand brugte en Tredjedel af sine Penge, fik derpaa 50 Kr., brugte derpaa en Fjerdedel af sine Penge, fik saa 70 Kr. og havde da 120 Kr.; hvor meget havde han i Begyndelsen?

Han havde x Kr., brugte $\frac{1}{3}x$ og havde nu $x - \frac{1}{3}x$ eller $\frac{2}{3}x$, fik derpaa 50 Kr. og havde nu $\frac{2}{3}x + 50$; heraf brugte han Fjerdedelen og havde altsaa tilbage de tre Fjerdedele eller $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50)$. Ligningen bliver altsaa

$$\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50) + 70 = 120; \; \frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50) = 50;$$

$$\frac{2}{3}x + 50 = \frac{4}{3} . 50; \; \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} . 50 - 50 = \frac{1}{3} . 50; \; x = 25.$$

A. kan tømme et Anker Vin i 30 Dage, B. kan tømme det i 20 Dage; hvor lang Tid behøve de til at tømme det, naar de drikke sammen?

Ved denne og lignende Opgaver føres alt hen til samme Tid, f. Eks. 1 Dag. Tages Ankerets Indhold til Enhed, kan A. i 1 Dag tømme $\frac{1}{30}$, B. i 1 Dag $\frac{1}{20}$, medens de i Forening tømme Ankeret i x Dage og derfor i 1 Dag $\frac{1}{x}$; man maa altsaa have

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{x};\ x = 12.$$

Naar dække Minut- og Timeviser hinanden paa et Ur første Gang efter Kl. 12?

Maale vi Vejen i Minutter, er Timeviseren gaaet x; Minutviseren gaar 12 Gange saa hurtig og er altsaa gaaet $12x$; for at naa Timeviseren, maa den imidlertid gaa en hel Omgang og desuden Stykket x; altsaa er

$$12x = 60 + x;\ x = 5\tfrac{5}{11}.$$

Svaret er altsaa: $5\frac{5}{11}$ Minut efter Kl. 1.

To Rør føre Vand til et Kar og kunne fylde det i 3 Timer; det ene Rør kan fylde Karret i 2 Timer; i hvor lang Tid kan det andet fylde Karret?

Vi faa ved at gaa frem som i Opgaven ovenfor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3};\ x = -6.$$

At Røret fylder Karret i — 1 Time betyder, at det virker saaledes, at det i en Time tilintetgør den Virkning, som udøves ved, at det fører Vand til i en Time; den negative Enhed betegner derfor, at Røret leder Vandet fra Karret; Svaret er altsaa, at det andet Rør vilde kunne fylde Karret i 6 Timer, men at det fører Vandet bort fra Karret. Havde vi straks forudsat, at Vandet

løb ud af det andet Rør, og spurgt om, i hvor mange Timer det kunde tømme Karret, var Ligningen bleven

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \text{ hvoraf } x = 6.$$

Opgaver til Øvelse.

1. Hvis jeg giver dig en Fjerdedel af mine Æbler og 10 til, har du lige saa mange, som hvis jeg giver dig en Femtedel af dem og 15 til; hvor mange Æbler har jeg?

2. Hvad er det for et Tal, som, multipliceret med $1\frac{1}{2}$ og adderet til $1\frac{1}{2}$, giver samme Resultat?

3. En Mand traf en Flok Gæs paa sin Mark og sagde: Er I der, I Tyve? Gasen svarede: Vi ere ikke 20; men dersom vi vare lige saa mange til og halv saa mange til og desuden en hel Gaas og en halv Gaas og en Gase, saa vare vi 20. Hvor mange var der?

4. A. tabte $\frac{1}{8}$ og B. $\frac{1}{9}$ af sine Penge; de tabte derved tilsammen 8 Kr., medens de oprindelig tilsammen havde 68 Kr.; hvor meget havde hver?

5. Dersom jeg vilde give A. Halvdelen, B. Tredjedelen og C. Femtedelen af mine Penge, vilde jeg komme til at mangle 7 Kr.; hvor mange har jeg?

6. En Kone solgte Halvdelen af sine Æg og $\frac{1}{2}$ Æg til, af de tiloversblevne solgte hun atter Halvdelen og $\frac{1}{2}$ Æg og saaledes videre, i det hele 5 Gange; hun havde nu solgt alle sine Æg; hvor mange havde hun fra Begyndelsen?

7. To Arbejdere skulle grave en Grøft paa 665 Fod; den ene graver daglig 45 Fod, den anden 50 Fod; hvor mange Dage bruge de?

8. A. forfølger B., der har 3 Dages Forspring; B.

rejser daglig $10\frac{1}{2}$ Mil, A. daglig 15 Mil; om hvor mange Dage indhentes B. af A.?

9. Dersom en Bog var 378 Sider større, vilde den netop have saa meget over 1000 Sider, som den nu har under 1000 Sider; hvor mange Sider har den?

10. En Brøks Nævner er 4 større end Tælleren; lægger man 11 til Tælleren og trækker man 1 fra Nævneren, faar man den omvendte Brøk; find Brøken.

11. En Officer stillede sine Soldater i lige saa mange Rækker, som der var Mand i hver Række, og fik 31 Mand tilovers; han vilde nu sætte en Mand til paa hver Led, men kom derved til at mangle 44 Mand; hvor mange havde han?

12. En Tjener skulde i aarlig Løn have 120 Kr. og en Frakke; for 5 Maaneder fik han 36 Kr. og Frakken; hvor højt vurderedes denne?

13. Naar danne de to Visere paa et Ur første Gang efter Middag en ret Vinkel, og naar danne de en lige Vinkel?

14. Kong Hieros Guldkrone vejede 20 ℔, men var forfalsket med Sølv; Archimedes fandt, at den, ved at vejes i Vand, tabte $\frac{5}{4}$ ℔ af sin Vægt; hvor meget Sølv indeholdt den, naar Sølv, ved at vejes i Vand, taber $\frac{1}{10}$, Guld $\frac{1}{20}$ af sin Vægt?

15. To Rør kunne fylde et Kar, det ene i 5, det andet i 6 Timer; et tredje kan tømme det i 3 Timer; hvor længe varer det, før Karret fyldes, naar alle tre Rør ere aabne?

16. Et Ur har Sekundviser paa samme Akse som de andre Visere; naar staar Sekundviseren første Gang efter Middag midt imellem de to andre?

17. Et 6cifret Tal har Cifret 1 længst til venstre; flyttes dette Ciffer bagest, bliver Tallet 3 Gange større; find Tallet.

Ligninger af første Grad med flere ubekendte.

68. **Substitutionsmetoden.** Dersom man har flere Ligninger med flere ubekendte (x, y, z, ...), kan man af den ene Ligning finde den ēne ubekendte, idet man foreløbig regner med de andre, som om de vare bekendte Størrelser; indsætter man den fundne Værdi i de andre Ligninger, har man nu en Ligning færre og en ubekendt færre; fortsætter man paa samme Maade, maa man, for at kunne løse Opgaven, til sidst komme til een Ligning med een ubekendt.

Man maa derfor oprindelig have lige saa mange Ligninger, som der er ubekendte.

Man kan altsaa bortskaffe en Størrelse af flere givne Ligninger, men benytter dertil den ene Ligning, saa at man efter Bortskaffelsen har een Ligning færre; skulle to Størrelser bortkastes, faar man to Ligninger færre o. s. v. At bortskaffe en Størrelse kaldes at eliminere den.

Den her angivne Metode, hvor vi eliminere ved at indsætte fra den ene Ligning i de andre, kaldes Substitutionsmetoden. Vi forudsætte her, at Ligningerne med Hensyn til de ubekendte, der skulle elimineres, ere af første Grad.

Eks. $x + y - z = 6$; $4x = 3y$; $3x + y - 2z = 11$.

Da z mangler i den anden Ligning, eliminere vi z af den første og tredje Ligning; af den første faas

$$z = x + y - 6,$$

der indsat i den tredje giver

$$3x + y - 2(x + y - 6) = 11 \text{ eller } x - y = -1.$$

Vi have nu de to Ligninger med to ubekendte

$$4x = 3y;\ x - y = -1.$$

Af den sidste faas $y = x + 1$, der, indsat i den første, giver

$$4x = 3(x + 1);\ x = 3.$$

Den fundne Værdi for x indsættes nu i en af de Ligninger, der kun indeholde x og y; man faar da

$$4 . 3 = 3y;\ y = 4,$$

hvorpaa de to fundne Værdier indsættes i en af de Ligninger, der indeholde z, og give

$$3 + 4 - z = 6;\ z = 1.$$

Vi have nu fundet

$$x = 3;\ y = 4;\ z = 1$$

og finde ved Prøven, at disse Værdier tilfredsstille de givne Ligninger.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^2 - y^2 = 24;\ x - y = 4.$
2. $4x^2 - 9y^2 = 91;\ 2x + 3y = 13.$
3. $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3};\ \ x + 2y + 3z = 7.$
4. $x + y + z = 6;\ 2x + 3y - z = 5;\ 3x - y + 2z = 7.$
5. $x(a + b) - y(a - b) = 4ab;$
   $x(a - b) = y(a + b).$
6. Find den Brøk, hvis Værdi bliver $\frac{1}{3}$, naar man lægger 1 til Tælleren, men $\frac{1}{4}$, naar man lægger 1 til Nævneren.

---

69. **De lige store Koefficienters Metode eller Additions- og Subtraktionsmetoden.** To Ligninger af første Grad med

to ubekendte kunne, naar Parenteser, Brøker o. s. v. ere bortskaffede som ved Ligninger med een ubekendt, skrives under Formen

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ mx + ny &= p \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

hvor a, b, c, m, n og p ere bekendte Størrelser.

Man multiplicerer nu de to Ligninger med saadanne Størrelser, at den ene ubekendte faar samme Koefficient i begge Ligninger. Denne ubekendte elimineres da ved, at de nye Ligninger adderes eller subtraheres (efter som Fortegnene ere forskellige eller ens).

For at eliminere y af Ligningerne (1) multiplicere vi den første med n, den anden med b og faa

$$\left.\begin{aligned} nax + nby &= nc \\ bmx + bny &= bp \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$(na - bm)\,x = nc - bp;$$

$$x = \frac{nc - bp}{na - mb}. \qquad (3)$$

For at finde y kan man indsætte den fundne Værdi af x i en af de givne Ligninger, der da kun har den ene ubekendte y. Man kunde ogsaa eliminere x af de givne Ligninger ved at multiplicere dem henholdsvis med m og a og subtrahere. Dersom Koefficienterne, som her, ere Bogstaver, findes imidlertid y lettest ved en simpel Ombytning af Bogstaver i Værdien for x. De to givne Ligninger blive nemlig uforandrede, naar man i dem samtidig ombytter x med y, a med b, m med n. Naar disse Ombytninger ere tilladte i de givne Ligninger, maa de ogsaa være tilladte i alle deraf dannede Ligninger, altsaa ogsaa i Ligningen (3); derved faas imidlertid

$$y = \frac{mc - ap}{mb - an}.$$

70. For at Opgaven skal kunne løses, maa de to givne Ligninger være saadanne, at den ene ikke i Virkeligheden er den samme som den anden, idet den f. Eks. er dannet af denne ved Multiplikation af alle Leddene med samme Tal. Saaledes kunne x og y ikke findes af de to Ligninger $3x + 5y = 7$ og $6x + 10y = 14$, da den anden af disse er den samme som den første, idet den er dannet af den ved Multiplikation med 2. Dersom Ligningerne ikke ere virkelig forskellige, viser det sig ved, at de blive ganske ens, naar man skaffer den ene ubekendte samme Koefficient i begge Ligninger, idet da ogsaa de andre Led blive ens; Subtraktionen giver da $0 = 0$, og omvendt viser dette Resultat, at man mangler en Ligning. De to Ligninger ovenfor blive saaledes begge

$$6x + 10y = 14.$$

71. Dersom de Led, der indeholde de ubekendte, falde bort ved Subtraktionen, medens de andre Led ikke falde bort, ere de givne Ligninger meningsløse. Har man saaledes $2x + 3y = 7$, $4x + 6y = 20$, faar man

$$\begin{array}{r} 4x + 6y = 20, \\ 4x + 6y = 14, \\ \hline \end{array}$$

hvoraf

$$0 = 6,$$

der viser, at der ikke gives Værdier af x og y, der tilfredsstille de givne Ligninger. Det er ogsaa indlysende, at den samme Størrelse $4x + 6y$ ikke paa een Gang kan være baade 14 og 20.

72. Flere Ligninger med flere ubekendte løses, dersom hvert Led kun indeholder den ene ubekendte, multipliceret med en bekendt Størrelse (lineære Lig-

ninger), paa lignende Maade. Har man f. Eks. 4 Ligninger med de ubekendte x, y, z, v, elimineres den ene ubekendte (bedst den med de mindste Koefficienter) tre Gange, f. Eks. af den første og anden, af den første og tredje og af den første og fjerde Ligning. Man maa blot herved sørge for at benytte alle de givne Ligninger. Dersom man f. Eks. tager den første og anden, den anden og tredje og derpaa den første og tredje, faar man vel dannet 3 Ligninger, men af disse vil den ene kunne dannes af de to andre, saa at vi kun have to virkelig forskellige Ligninger.

Vi have nu af de 4 Ligninger med 4 ubekendte dannet 3 Ligninger med 3 ubekendte; af disse dannes paa samme Maade 2 Ligninger med 2 ubekendte og deraf 1 Ligning med 1 ubekendt. Denne kan nu findes, og dens Værdi indsættes i en af de Ligninger, der kun have 2 ubekendte; af denne kan da den anden ubekendte findes, o. s. v.

Eks. 1.

$$5x + 3y - 2z + v = 9 \quad (1)$$
$$3x - 4y + 5z - v = 6 \quad (2)$$
$$4x + 7y - z - 2v = 7 \quad (3)$$
$$6x + 3y - 5z + 2v = 5 \quad (4)$$

Af (1) og (2) faas $8x - y + 3z = 15$ (5)

- (3) og (4) - $10x + 10y - 6z = 12$ (6)

- (1) og (3) - $14x + 13y - 5z = 25$ (7)

Af (5) og (6) faas efter

Divisjon af (6) med 2 $13x + 4y = 21$ (8)

Af (5) og (7) faas . . . $41x + 17y = 75$ (9)

Af (8) og (9) faas $57x = 57$; $x = 1$.

Af (8) faas nu $y = 2$, af (5) derpaa $z = 3$ og endelig af (1) $v = 4$.

Eks. 2.

$$x + y + z = 1 \quad (1)$$

$$ax + by + cz = d \quad (2)$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \quad (3)$$

(1) og (2) $(c - a)\,x + (c - b)\,y = c - d$ (4)

(2) og (3) $a\,(c - a)x + b\,(c - b)y = d\,(c - d)$ (5)

$$b\,(c - a)\,x - a\,(c - a)\,x = b\,(c - d) - d\,(c - d),$$

$$(b - a)\,(c - a)\,x = (b - d)\,(c - d),$$

$$x = \frac{(b - d)\,(c - d)}{(b - a)\,(c - a)}. \quad (6)$$

De givne Ligninger forandres ikke, naar man ombytter x med y og a med b eller x med z og a med c; altsaa kunne de samme Ombytninger foretages i (6), hvorved man faar

$$y = \frac{(a - d)\,(c - d)}{(a - b)\,(c - b)}; \quad z = \frac{(b - d)\,(a - d)}{(b - c)\,(a - c)}.$$

73. Ogsaa ved flere Ligninger med flere ubekendte er det muligt, at man kommer til Resultatet $0 = 0$, uagtet man har benyttet alle de givne Ligninger; man slutter da som før, at der i Virkeligheden mangler en Ligning, idet den ene af de givne kan dannes af de andre. De givne Ligninger kunne ogsaa være i Strid med hinanden, og dette vil da vise sig ved, at Løsningen fører til et absurd Resultat (f. Eks. $0 = 7$).

74. Ofte kan det være fordelagtigt at betragte andre Størrelser end x, y ... som de ubekendte, idet det derved kan lykkes at løse Ligninger, der egentlig ere af højere Grad, ved samme Methode som Ligninger af første Grad. Er f. Eks.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1,$$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6},$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = \frac{5}{2},$$

betragtes først $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ og $\frac{1}{z}$ som de ubekendte, og man regner som ovenfor; man faar først (af 1 og 2, 2 og 3)

$$\frac{5}{x} - \frac{1}{z} = \frac{14}{3}; \quad \frac{5}{x} - \frac{2}{z} = \frac{13}{3}$$

og deraf $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x} = 1$, hvorpaa en af de givne Ligninger giver $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Altsaa er $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Eksempler til Øvelse.

1. $x + y = a; \quad x + z = b; \quad y + z = c.$
2. $x + ay = b; \quad ax - by = c.$
3. $\frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{4}(x - y) = 59; \quad 5x - 33y = 0.$
4. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{9}; \quad \frac{1}{5x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}.$
5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c}; \quad \frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1 - \frac{y}{c}.$
6. $2x + 4y + 5z = 49; \quad 3x + 5y + 6z = 64;$
   $4x + 3y + 4z = 55.$
7. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 12; \quad \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - \frac{x}{6} = 8;$
   $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 10.$
8. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12}; \quad \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24};$
   $-\frac{4}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = \frac{1}{2}.$
9. $x - y + z = 0; \quad abx - acy + bcz = 1;$
   $(a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0.$

10. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$;

$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$.

11. $2(x-y)=3z-2$; $x-3z=3y-1$;

$2x+3z=4(1-y)$.

12. $(a-b)x+(a+b)y=2a^2+2b^2$;

$(a^2-b^2)(x+y)=2a^3+ab(x-y)$.

13. $6x-\frac{2y-x}{23-x}=20-\frac{59-12x}{2}$;

$3y+\frac{y-3}{x-18}=30-\frac{73-9y}{3}$.

14. $\frac{2x+z-4}{12}+\frac{3y-6z+1}{13}=\frac{x-2}{4}$;

$\frac{x}{9}-y+3z=2$;

$\frac{3x-2y+5}{5}-\frac{4x-5y+7z}{7}=\frac{2}{7}+\frac{y-3z+2}{2}$.

15. $9x-2z+u=41$; $7y-5z-t=12$;

$4y-3x+2u=5$; $3y-4u+3t=7$;

$7z-5u=11$.

16. Hvilken Brøk faar Værdien $\frac{3}{5}$, naar man adderer 1 til dens Tæller, men $\frac{1}{2}$, naar man adderer 1 til dens Nævner?

17. Et 2-cifret Tal er 4 Gange større end sin Tværsum (Ciffersum); bytter man Cifrene om, bliver Tallet 27 større; find Tallet.

18. Et 2-cifret Tal giver, divideret i et 4-cifret Tal, Kvotienten 204 og Resten 1. Danner man et 6-cifret Tal af de to ved at stille dem sammen, bliver dette dobbelt saa stort, naar man stiller det 4-cifrede, som naar man stiller det 2-cifrede forrest. Find Tallene.

19. Et Tal *a* med 1 Ciffer og et Tal *b* med 5 Cifre have Summen 15390; stiller man *a* foran *b*, faar man et Tal, der er 4 Gange større end det, som man faar ved at stille *b* foran *a*. Find Tallene.

20. A. og B. kunne, naar de arbejde sammen, fuldføre en Mur i 12 Dage, B. og C. i 20 Dage, A. og C. i 16 Dage. Hvor mange Dage bruger hver, naar han arbejder alene, og hvor mange Dage bruge de, naar de arbejde alle tre i Forening?

21. Fire Tal have tre og tre henholdsvis Summerne 130, 135, 147 og 152. Find Tallene.

22. A., B., C., D. og E. spille Kort og have tilsammen 114 Kr.; A. vinder Halvdelen af B.s, Tredjedelen af C.s, Fjerdedelen af D.s og Sjettedelen af E.s Penge; i det næste Spil vinder B. Femtedelen af A.s og Tredjedelen af D.s Penge. B. har nu lige saa meget som D. og E. tilsammen; C. har 1 Kr. flere end E. og 2 Kr. flere end D., medens A. har 5 Kr. færre end B. og C. tilsammen. Hvor meget havde hver, da Spillet begyndte?

23. En Vogn kører 180 Fod; Forhjulet har derved gjort 6 Omdrejninger flere end Baghjulet; dersom Forhjulets Omkreds havde været en Fjerdedel og Baghjulets en Femtedel større, var Forskellen bleven 4 Omdrejninger; hvor store ere Omkredsene?

24. Man søger et 3-cifret Tal med Tværsummen 18, og hvori 11 gaar op; læses Cifrene i omvendt Orden, bliver Tallet $4\frac{1}{2}$ Gang større.

25. A., B. og C. multiplicere to Tal, *a* og *b*; A. glemmer ved Regningen et Sted Menten 1; B. glemmer 2 paa den følgende Plads (til venstre) og C. 3 paa den følgende Plads; de gøre derpaa Prøve ved at dividere Produktet med *a*; A. faar derved Kvotienten 542 og

Resten 75, B. Kvotienten 540 og Resten 55, C. Kvotienten 507 og Resten 60. Find Tallene.

26. Tre Stykker Sølv veje tilsammen 320 Kvint; af det første er $\frac{9}{10}$, af det andet $\frac{8}{4}$, af det tredje $\frac{7}{10}$ rent Sølv; ved at sammensmelte det første Stykke med det andet eller med det tredje faar man et Stykke, hvoraf $\frac{4}{5}$ er rent Sølv; hvor meget vejer hvert Stykke?

27. I et 3-cifret Tal er det mellemste Ciffer Middeltallet mellem (den halve Sum af) de to yderste; Tallet er 48 Gange sin Tværsum og bliver mellem 100 og 200 mindre, dersom man læser Cifrene i omvendt Orden. Find Tallet.

28. Et Spil Kort oplægges i *a* Bunker, hvorved der bliver *b* Kort tilovers; hver Bunke er dannet ved, at man tæller til 12 (*c*), idet man for det nederste Kort tæller dets Antal Øjne og for hvert af de andre lægger 1 til. (Kommer et Billedkort nederst i en Bunke, kan man tillægge det et Antal Øjne efter Behag). Hvor mange Øjne have Bunkernes nederste Kort tilsammen?

Proportioner.

75. Vi have set, at Divisor og Dividend kunne være benævnte, men at de da maa være ensartede; man kan spørge om, hvor mange Gange 6 ℔ indeholdes i 24 ℔; men det er meningsløst at spørge om, hvor mange Gange 6 ℔ indeholdes i 24 Fod.

En Brøk, hvis Tæller og Nævner ere ensartede Størrelser, kaldes et Forhold; (dog bruges dette Ord ogsaa i Stedet for Ordene Brøk eller Kvotient). Tælleren kaldes Forleddet, Nævneren Efterleddet. Et Forhold kan

udtrykkes ved et ubenævnt Tal; saaledes udtrykkes Forholdet mellem 24 ℔ og 6 ℔ ved Tallet 4, Forholdet mellem 6 Fod og 5 Fod ved $\frac{6}{5}$. Det er altsaa ligegyldigt, om man i Forholdet mellem ensbenævnte Størrelser læser Benævnelsen med eller ej.

En Ligning, der udtrykker, at to Forhold ere lige store, kaldes en Proportion; saaledes ere

$$\frac{24 ℔}{6 ℔} = \frac{16 \text{ Fod}}{4 \text{ Fod}}; \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Proportioner. I Proportionen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ eller } a:b = c:d \quad (1)$$

(læses: a forholder sig til b som c til d)

kaldes a, b, c og d henholdsvis første, andet, tredje og fjerde Led. a og d kaldes Yderleddene, b og c Mellemleddene.

76. Produktet af Yderleddene er lig Produktet af Mellemleddene.

Thi bortskaffes Brøkerne af (1) ved Multiplikation med bd, faar man

$$ad = bc. \quad (2)$$

Omvendt kan Proportionen atter udledes af denne Ligning ved Divisjon med bd. Man prøver derfor en Proportions Rigtighed ved at undersøge, om Yderleddenes Produkt er lig Mellemleddenes Produkt.

Sætte vi Produktet af Yderleddene lig Produktet af Mellemleddene, kunne Leddene kun forstaas som ubenævnte Tal; man skriver dog ogsaa ofte i dette Tilfælde de benævnte Tal, da dette ikke kan misforstaas.

77. I en Proportion kan man ombytte Yderleddene indbyrdes, Mellemleddene ind-

byrdes og begge Yderleddene med begge Mellemleddene, thi disse Ombytninger forandre ikke Ligningen (2), der tjener til Prøve.

Følgende Proportioner ere altsaa rigtige, dersom een af dem er rigtig,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c};$$

thi den samme Ligning $ad = bc$ tjener til Prøve for dem alle.

Her er dog at mærke, at Benævnelserne maa tænkes udeladte, da Ombytningerne ellers kunne føre til meningsløse Udtryk. Man skriver dog undertiden de meningsløse Udtryk, da dette ikke kan foraarsage Misforstaaelser; skriver man altsaa 16 ℔ : 12 Fod = 4 ℔ : 3 Fod, mener man hermed egentlig 16 ℔ : 4 ℔ = 12 Fod : 3 Fod.

78. Man kan finde det ene Led af en Proportion, naar man kender de tre andre.

Af $ad = bc$ findes $a = bc : d$; $b = ad : c$ o. s. v.

x kaldes fjerde Proportional til a, b og c, dersom $a : b = c : x$; man har da $x = bc : a$.

x kaldes Mellemproportional mellem a og b, dersom $a : x = x : b$; b kaldes her tredje Proportional til a og x; b findes let, dersom man kender a og x, men vi kunne endnu ikke finde x, naar a og b ere bekendte, da Ligningen $x^2 = ab$ er af anden Grad.

79. En Proportion kan naturligvis behandles som andre Ligninger, ligesom Forhold kunne behandles som andre Brøker; man kan derved af en Proportion udlede ny; saaledes dannes f. Eks. følgende Proportioner af den første;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}; \quad \frac{a}{mb} = \frac{c}{md}; \quad \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m};$$

$$\frac{ma}{mb} = \frac{pc}{pd} \quad \text{o. s. v.}$$

80. **Forleddene eller Efterleddene i begge Forhold kunne erstattes ved Summen eller Differensen af For- og Efterled.**

Af (1) dannes saaledes de ny Proportioner

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ o. s. v.}$$

Den sædvanlige Prøve viser, at disse Proportioner ere rigtige, naar (1) er det.

Sammen med denne Regel kunne de tidligere Regler anvendes; man danner derved f. Eks. følgende Proportioner af (1)

$$\frac{a+3b}{a} = \frac{c+3d}{c}; \quad \frac{ma-nb}{ma+nb} = \frac{mc-nd}{mc+nd};$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^3} = \frac{c^3+d^3}{c^3} \text{ o. s. v.}$$

81. **Har man flere lige store Forhold, og adderer man Forleddene for sig, Efterleddene for sig, faar man et nyt Forhold, der er lig de givne Forhold.**

Af
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$
faar man
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f},$$
thi
$$e(b+d+f) = f(a+c+e),$$
da
$$eb = af; \quad ed = cf; \quad ef = ef.$$

Ved først at forandre Leddene af de givne Forhold kan man nu f. Eks. af de samme tre lige store Forhold udlede

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} = \frac{3a+mc-ne}{3b+md-nf};$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{e^2}{f^2} = \frac{3a^2+4c^2-5e^2}{3b^2+4d^2-5f^2} \text{ o. s. v.}$$

Dersom man derimod lægger Tæller til Tæller og Nævner til Nævner i to ulige store Brøker med positive Tællere og Nævnere, faar man en Brøk, der i Størrelse ligger mellem de to givne og er nærmest ved den af dem, der har den største Nævner.

Dersom nemlig

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ saa er ogsaa } ad > bc.$$

Af $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)}, \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{d(b+d)}$

følger, da de to Differenser ere positive,

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

For Resten er der ingen anden Forskel paa de to Differenser, end at den ene har Faktoren b i Nævneren, hvor den anden har d; er $b > d$, bliver derfor den første Differens mindst, er $b < d$, bliver den sidste mindst.

82. **Ligefrem proportionale Størrelser.** I Praksis forekommer det ofte, at to Slags Størrelser ere saaledes afhængige af hinanden, at den ene bliver m Gange større, naar den anden bliver m Gange større. Som Eksempler kunne vi nævne Varemængder og deres Pris, et Arbejdes Størrelse og den Tid, der medgaar til at udføre det, o. s. v. Køber jeg tre Gange saa mange Varer, maa jeg betale tre Gange saa meget for dem; bliver et Arbejde dobbelt saa stort, tager dets Udførelse dobbelt saa lang Tid, o. s. v. To Størrelser af den ene Slags og de to tilsvarende af den anden Slags danne derfor en Proportion; koste 4 ℔ 3 Kr., maa 12 ℔ koste 9 Kr., og man har

$$12 \text{ ℔} : 4 \text{ ℔} = 9 \text{ Kr.} : 3 \text{ Kr.}$$

Man kan altsaa af 4 saadanne Størrelser finde den ene, naar de tre ere opgivne.

Dersom man f. Eks. ved, at a ℔ koste b Kr., kan man finde, hvad c ℔ koste, ved Proportionen

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}, \text{ hvoraf } x = \frac{cb}{a}.$$

Saaledes som Stykket opstilles i praktisk Regning (Reguladetri), ere Mellemleddene ombyttede; man skriver

a ℔ — b Kr. — c ℔.

Man ser af Ligningen ovenfor, at Resultatet findes, naar Mellemleddet (b) multipliceres med Bagleddet (c) og Produktet divideres med Forleddet (a).

At to foranderlige (variable) Størrelser y og x ere proportionale kan udtrykkes ved Ligningen

$$y = kx,$$

hvor k ikke forandrer sig (er konstant). k er den Værdi af y, som svarer til $x = 1$, thi Ligningen tilfredsstilles af disse Værdier. Er f. Eks. x Antallet af ℔ i en vis Vare og y Antallet af Kroner, som x ℔ koste, bliver k Kr. Prisen for 1 ℔, og Ligningen tjener til at finde y, naar x er givet, og omvendt. Dersom y_1 og y_2 svare henholdsvis til x_1 og x_2, har man

$$y_1 = kx_1;\ y_2 = kx_2, \text{ altsaa } y_1 : y_2 = x_1 : x_2,$$

der viser, at Størrelserne y og x ere proportionale, naar de tilfredsstille Ligningen $y = kx$.

83. **Omvendt proportionale Størrelser** kaldes to Slags Størrelser, der ere saaledes afhængige af hinanden, at den ene bliver m Gange større, naar den anden bliver m Gange mindre. Som Eksempel kan nævnes den Tid, som et Arbejdes Udførelse tager, og Antallet af Arbejdere; dobbelt saa mange Arbejdere kunne udføre Arbejdet i den halve

Tid; dersom a Arbejdere kunne udføre et Arbejde i b Dage, og c Arbejdere kunne udføre det i x Dage, har man

$$a : c = x : b.$$

I Regning (omvendt Reguladetri) opskrives Stykket i Almindelighed, som om Størrelserne vare ligefrem proportionale, og derpaa ombyttes For- og Bagled; man skriver saaledes

$$\begin{matrix} (a)\ \text{Arb.} & — & b\ \text{D.} & — & (c)\ \text{Arb.}, \\ c & & & & a \end{matrix}$$

altsaa $x = ab : c$, som ogsaa Proportionen ovenfor giver.

At to Størrelser y og x ere omvendt proportionale kan udtrykkes ved Ligningen

$$y = \frac{k}{x} \text{ eller } yx = k,$$

hvor k som ovenfor er den Værdi af y, der svarer til $x = 1$. Man faar nemlig, naar y_1 og y_2 svare til x_1 og x_2,

$$y_1 = \frac{k}{x_1},\ y_2 = \frac{k}{x_2},\ \text{altsaa } \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

der viser, at y og x ere omvendt proportionale.

84. **Sammensatte Forhold.** En Størrelse kan samtidig være ligefrem eller omvendt proportional med flere andre. Skal der bygges en Mur af en vis Længde, Højde og Tykkelse af et vist Antal Arbejdere, vil den dertil nødvendige Tid være ligefrem proportional med Længden, med Højden og med Tykkelsen, men omvendt proportional med Arbejdernes Antal. Lad os antage, at man bruger d Dage for en vis Længde, Højde og Tykkelse og med et vist Antal Arbejdere; dersom nu Længden bliver m Gange større, Højden n Gange større, Tykkelsen p Gange større, bliver Dagenes Antal mnp Gange større, altsaa $mnpd$. Bliver nu Arbejdernes Antal q Gange større, maa

Tiden blive q Gange mindre, og man faar for det søgte Antal Dage

$$x = \frac{mnpd}{q}.$$

I Almindelighed udtrykkes ved Ligningen

$$y = k\,\frac{x_1\,x_2\,\ldots}{z_1\,z_2\,\ldots},$$

at y er ligefrem proportional med Størrelserne x og omvendt proportional med Størrelserne z. Naar Ligningen skal vedblive at være tilfredsstillet, maa y nemlig blive lige saa mange Gange større, som en af Størrelserne x bliver større (medens de andre Størrelser x og z ere uforandrede), og lige saa mange Gange mindre, som en af Størrelserne z bliver større. k er den Værdi af y, som svarer til $x_1 = x_2 \ldots = z_1 = z_2 \ldots = 1$.

Eks. 12 Arbejdere kunne bygge en Mur, 50 Fod lang, 10 Fod høj og 2 Sten tyk i 12 Dage; hvor mange Dage bruge 8 Arbejdere til en Mur, der er 75 Fod lang, 12 Fod høj og 3 Sten tyk?

$$m = \frac{75}{50};\ n = \frac{12}{10};\ p = \frac{3}{2};\ q = \frac{8}{12};\ d = 12,$$

altsaa $$x = \frac{75\,.\,12\,.\,3\,.\,12}{50\,.\,10\,.\,2\,.\,8}\,.\,12\,\text{D.} = 48\tfrac{3}{5}\,\text{D.}$$

85. **Selskabsregning.** Dersom en Størrelse A skal deles i f. Eks. tre Dele, der staa i samme indbyrdes Forhold som tre givne Tal a, b og c, har man, naar de søgte Dele betegnes ved x, y og z,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{A}{a+b+c}.$$

Betegne vi det bekendte Forhold $\frac{A}{a+b+c}$ ved f, have vi nu $x = af;\ y = bf;\ z = cf.$

Eks. A., B. og C. indskyde henholdsvis 500, 700 og 1300 Kr. i en Forretning; Opgørelsen viser, at man har 3750 Kr. til Deling; hvor meget faar hver? Man har

$$\frac{x}{500} = \frac{y}{700} = \frac{z}{1300} = \frac{3750}{2500} = \frac{3}{2};$$

$$x = 750;\ y = 1050;\ z = 1950.$$

Største fælles Maal og mindste fælles Mangefold.

86. Et Tal D, i hvilket et Tal d gaar op, kaldes et Multiplum (Mangefold, Dividend) af d, medens d kaldes Maal (Faktor, Divisor) for D. De forskellige Multipla af d ere altsaa .... $-d$, 0, d, $2d$, $3d$ ....

Eks. 0, 6, 12, 18, 24 .... ere Multipla af 6; 6 er Maal for 18, 48, 72 o. s. v.

Dersom Tallet D ikke er et Multiplum af d, kan det skrives som et Multiplum af d plus en Rest; betegnes denne ved r, har man altsaa

$$D = dq + r \text{ eller } D - dq = r.$$

q kaldes den ufuldstændige Kvotient eller, hvor det ikke kan misforstaas, blot Kvotienten. Kvotienten kan altid vælges saaledes, at Resten er mindre end Divisor; man kan dog ogsaa tage en anden Kvotient og derved faa Rester, der ere større end Divisor eller negative; saaledes har man f. Eks.

$$27 = 3.7 + 6 = 2.7 + 13 = 4.7 - 1.$$

Forskellen mellem to forskellige Rester er naturligvis et Multiplum af Divisor. Naar vi i det følgende sige, at en Rest har en vis Størrelse, vil det derfor kun sige, at vi kunne faa denne Rest ved at vælge en passende Kvotient.

87. **Resten af en flerleddet Størrelse med en given Divisor faas, naar man for hvert af Leddene sætter dets Rest.**

Af $D = dq + r;\ D_1 = dq_1 + r_1$
følger nemlig

$$D \pm D_1 = d(q \pm q_1) + r \pm r_1,$$

der viser, at $D \pm D_1$ giver Resten $r \pm r_1$, naar man tager $q \pm q_1$ til Kvotient.

Eks. Ved Divisjon med 19 giver $23 + 37 - 3 + 96$ Resten $4 - 1 - 3 + 1$ eller 1.

88. **Resten af et Produkt faas, naar man for Faktorerne sætter deres Rester.**

Ved Multiplikation af de to Ligninger ovenfor faas nemlig

$$DD_1 = d^2qq_1 + dqr_1 + dq_1r + rr_1$$
$$= d(dqq_1 + qr_1 + q_1r) + rr_1,$$

saa at Resten bliver rr_1, naar Størrelsen i Parentesen tages til Kvotient.

Eks. Ved Divisjon med 19 giver $23 . 37 . 3 . 96$ Resten $4 . (-1) . 3 . 1 = -12$ eller 7.

89. **Resten af en Potens faas, naar man for Roden sætter Rodens Rest.**

Denne Sætning følger af den forrige.

Eks. Ved Divisjon med 7 giver $22^3 . 51^2 + 38^2 . 11$ Resten $1^3 . 2^2 + 3^2 . 4 = 40$ eller 5.

90. Af de her beviste Sætninger følger, at **et Tal gaar op i en flerleddet Størrelse, dersom det gaar op i alle Leddene, og at det gaar op i et Produkt, naar det gaar op i en af Faktorerne.**

91. **Primtal** kaldes et Tal, der kun er deleligt med 1 og sig selv; de første Primtal ere

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ...

Man kender ingen Lov, hvorefter man, uden at prøve sig frem, kan finde Rækken af Primtal; man ser imidlertid let, at Rækken er ubegrænset, thi dersom der kun gaves et bestemt Antal Primtal, $p_1, p_2, \ldots p_n$, vilde $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ ikke være deleligt med noget Primtal og altsaa være et nyt Primtal.

Polynomier, der ikke kunne opløses i Faktorer af lavere Grader, kaldes irreduktible.

92. **Tals Delelighed med visse lave Tal.** Ethvert Tal kan skrives

$$t = a + 10 . b + 10^2 . c + 10^3 . d + \ldots,$$

idet a, b, c, d ere Tallets Cifre, læste fra højre.

Er Divisor 2, 5 eller 10, bliver Resten af 10 lig Nul; indsætte vi nu overalt Nul for 10, se vi, at Resten af t er a; altsaa give 2, 5 og 10 samme Rest med et Tal som med Tallets Enere.

De Tal, som gaa op i 100, men ikke i 10, give Resten 0 ved Divisjon i 10^2, 10^3, $10^4 \ldots$; t har derfor samme Rest med disse Divisorer som $a + 10b$. Dette kan udvides til Tal, der gaa op i 1000, o. s. v.

3 og 9 give med Dividenden 10 Resten 1; indsættes 1 for 10, faa vi da Resten af t.

$$a + b + c + d \ldots,$$

der kaldes Tallets Tværsum. Altsaa giver et Tal samme Rest med 3 og 9 som Tallets Tværsum.

11 giver ved Divisjon i 10 Resten -1; indsættes denne for 10, faar man

$$a + b(-1) + c(-1)^2 + d(-1)^3 + \ldots$$
$$= a - b + c - d + \ldots$$

Et Tal giver altsaa samme Rest med 11 som det Tal, man faar ved at tage Summen af hver-andet Ciffer minus Summen af de øvrige.

93. Lad os ved Divisjon af d i D finde

$$D = dq + r \text{ eller } D - dq = r.$$

Dersom et Tal gaar op i D og d, gaar det ogsaa op i r; ved i den anden Ligning at sætte 0 for D og d ser man nemlig, at r giver Resten 0. Paa samme Maade ser man ved Betragtning af den første Ligning, at:

Et Tal, der gaar op i d og r, gaar ogsaa op i D.

94. Dersom D og d multipliceres eller divideres med samme Tal m, bliver q uforandret, medens r bliver multipliceret eller divideret med m.

Af
$$D = dq + r$$
følger nemlig
$$mD = md \,.\, q + mr,$$
der viser, at man, naar Dividenden er mD, Divisor md, kan tage Kvotienten q og da til Rest faar mr; sætter man $\frac{1}{m}$ for m, faas den anden Del af Sætningen.

95. Hvad vi have sagt, gælder ogsaa om Polynomier, idet vi ved, at et Polynomium d gaar op i et andet D, forstaa, at D kan dannes af d ved Multiplikation med et helt Polynomium q.

Eks. x giver ved Divisjon med $x - a$ Resten a, x^n giver da Resten a^n og $x^n - a^n$ Resten Nul. De analoge Sætninger (Pag. 46) bevises paa samme Maade.

Er Dividenden $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, bliver Resten $A + Ba + Ca^2 + \ldots$, og Divisjonen gaar op, hvis denne Størrelse er Nul. Vi have saaledes et nyt Bevis for Sætningen 55.

96. Det største fælles Maal (Faktor, Divisor) for flere Tal (Polynomier) er det største

Tal (det Polynomium af højeste Grad), som gaar op i dem alle.

Dersom vi skulle finde det største fælles Maal for d og D, dividere vi d i D; gaar Divisjonen ikke op, faar man en Rest r. Det største fælles Maal for D og d er ogsaa største fælles Maal for d og r. Ethvert fælles Maal for D og d gaar nemlig op i r (93) og er altsaa fælles Maal for d og r. Ethvert fælles Maal for d og r gaar op i D (93) og er altsaa fælles Maal for D og d. Det ene Par Størrelser, D og d, og det andet Par, d og r, have altsaa alle de samme Størrelser til fælles Maal, følgelig have de ogsaa det samme største fælles Maal.

I Stedet for at søge største fælles Maal for D og d kunne vi nu søge for d og r. Vi dividere derfor r i d; gaar Divisjonen op, er r st. f. M. for d og r, altsaa ogsaa for D og d; gaar Divisjonen ikke op, faa vi en Rest r_1 og kunne nu søge for r og r_1 o. s. v. Da Resterne paa denne Maade blive mindre og mindre, maa vi tilsidst finde en Rest, som gaar op i den forrige Divisor; denne Rest er da det søgte største fælles Maal.

Dersom det største fælles Maal for to Tal er 1, siges Tallene at være primiske med hinanden eller indbyrdes Primtal (f. Eks. 15 og 16, 12 og 25 o. s. v.).

Et Primtal er primisk med ethvert Tal, i hvilket det ikke gaar op.

Regningen kan lettes ved Anvendelse af følgende Regler:

1. Dersom man i Løbet af Regningen træffer en Divisor og dens Rest, hvis st. f. M. man kender, kan man standse Regningen, da dette st. f. M. ogsaa er st. f. M. for d og D.

2. En fælles Faktor kan borttages af en Divisor og dens Rest, men det fundne st. f. M. maa da multipliceres med denne Faktor (se 97).

3. En Faktor, der findes i Divisor og er primisk med Dividenden, kan bortdivideres af Divisor, da den ikke kan høre til de fælles Faktorer (se 99).

4. Man kan af samme Grund multiplicere Dividenden med en Faktor, der er primisk med Divisor (se 99).

De to sidste Regler anvendes især ved Polynomier for at undgaa Brøk i Kvotienten. *Den Faktor i Divisor, der vilde foraarsage Brøk, bortdivideres om muligt; kan den ikke bortdivideres af Divisor, multipliceres Dividenden med den.*

Ved Polynomier standser Regningen, naar man kommer til en Rest, der ikke indeholder det Bogstav, man har ordnet efter.

Regningen opskrives i Almindelighed saaledes:

$d\,)\,\underline{D}\,(\,q$

$\quad r\,)\,\underline{d}\,(\,q_1$

$\qquad r_1\,)\,\underline{r}\,(\,q_2$

$\qquad\quad \vdots$

$\qquad\qquad r_n\,)\,\underline{r_{n-1}}\,(\,q_{n+1}$

$\qquad\qquad\qquad 0$

Eks. St. f. M. for 75 og 115:

```
75 ) 115 ( 1
      75
      40 ) 75 ( 1
           40
           35 ) 40 ( 1
                35
                 5 ) 35 ( 7
                     35
                      0
```

St. f. M. er 5.

St. f. M. for $a^2 - b^2$ og $a^2 + 2ab + b^2$:

$$
\begin{array}{l}
a^2 - b^2 \,)\, a^2 + 2ab + b^2 \,(\, 1 \\
\qquad\quad a^2 \qquad\quad - b^2 \\
\hline
\qquad\qquad 2ab + 2b^2 \,)\, a^2 - b^2 \,(\, a - b \\
\qquad\qquad\quad a + b \qquad a^2 - b^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

St. f. M. er $a + b$.

St. f. M. for $3x^2 + x - 4$ og $x^4 - 1$:

$$
\begin{array}{l}
3x^2 + x - 4 \,)\, x^4 - 1 \\
\qquad\quad 3x^4 - 3 \,(\, x^2 \\
\qquad - \; 3x^4 \pm x^3 \mp 4x^2 \\
\hline
\qquad - x^3 + 4x^2 - 3 \\
\qquad - 3x^3 + 12x^2 - 9 \,(\, - x \\
\qquad \mp 3x^3 \mp x^2 \pm 4x \\
\hline
\qquad 13x^2 - 4x - 9 \\
\qquad 39x^2 - 12x - 27 \,(\, 13 \\
\qquad - \; 39x^2 \pm 13x \mp 52 \\
\hline
\qquad\qquad - 25x + 25 \,)\, 3x^2 + x - 4 \,(\, 3x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad x - 1 \quad - \; 3x^2 \mp 3x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x - 1$ er st. f. M.

97. **Dersom to Tal blive m Gange større eller mindre, bliver deres st. f. M. ogsaa m Gange større eller mindre.**

Resten ved den første Divisjon bliver nemlig multipliceret eller divideret med m (94); det samme gælder om alle de følgende Rester og altsaa ogsaa om det største fælles Maal.

Heraf følger, at dersom to Tal divideres med deres største fælles Maal, ere de udkomne Kvotienter indbyrdes primiske; er st.f.M. nemlig m, bliver det ved Divisjonen m Gange mindre, altsaa 1. Naar man forkorter en Brøk med st. f. M. for Tæller og Nævner, vil derfor den udkomne Brøk ikke kunne forkortes mere.

98. Dersom et Tal gaar op i to andre, gaar det ogsaa op i deres st. f. M.

Et Tal, der gaar op i D og d, gaar nemlig ogsaa op i r og ligeledes i de følgende Rester, altsaa ogsaa i det st. f. M.

Man finder derfor st. f. M. for tre Tal ved først at søge for de to og derpaa for det fundne og det tredje. Dette udvides til flere Tal.

99. Dersom et Tal t gaar op i ab og er primisk med a, gaar det op i b.

t og a have 1 til st. f. M.; tb og ab have altsaa (97) b til st. f. M. t gaar op i tb og i ab og altsaa (98) ogsaa i deres st. f M., det vil sige i b.

Dersom et Primtal gaar op i et Produkt ab, gaar det op i a eller b. Hvis det nemlig ikke gaar op i a, er det primisk med a og gaar da op i b.

Man ser let, at der heraf følger, at et Primtal, der gaar op i et Produkt af flere Faktorer, maa gaa op i mindst een af Faktorerne, og at et Primtal, der gaar op i en Potens, maa gaa op i Roden. End videre følger, at dersom en uforkortelig Brøk $\frac{a}{b}$ er lig en Brøk $\frac{c}{d}$, maa a og b gaa op henholdsvis i c og d, thi da $ad = bc$, maa b som primisk med a gaa op i d (da b gaar op i bc,

altsaa ogsaa i ad); man kan altsaa sætte $d = mb$, hvor m er et helt Tal; heraf følger da $c = ma$.

100. Dersom to Tal ere indbyrdes Primtal, ere Potenser af disse Tal ogsaa indbyrdes Primtal.

Dersom nemlig a^m ikke er primisk med b^n, maa der være et Primtal p, der gaar op i dem begge; p maa da ogsaa gaa op i a og b, men dette strider mod det givne.

En Potens af en uforkortelig Brøk er derfor atter en uforkortelig Brøk.

101. Dersom to indbyrdes primiske Tal a og b gaa op i et Tal A, gaar deres Produkt ogsaa op i Tallet.

Da a gaar op i A, kan man sætte (Q hel)

$$A = aQ;$$

da b gaar op i A og altsaa ogsaa i aQ og er primisk med a, gaar b op i Q, saa at man kan sætte

$$Q = bQ_1,$$

altsaa

$$A = abQ_1,$$

der viser, at ab gaar op i A.

Heraf følger, at 6 gaar op i et Tal, dersom 2 og 3 gaa op, at 15 gaar op, dersom 3 og 5 gaa op, 99, dersom 9 og 11 gaa op, o. s. v.

102. At opløse et Tal i Primfaktorer vil sige, at skrive det som et Produkt af lutter Primtal. Et Tal kan ikke opløses i to forskellige Systemer af Primfaktorer.

Dersom man nemlig havde

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots,$$

hvor $a, b, \ldots$ ere Primtal, fik man ved at dividere paa begge Sider med a^α ($\alpha < \alpha_1$)

$$b^\beta \ldots = a^{\alpha_1 - \alpha} b^{\beta_1} \ldots,$$

hvor *a* gaar op paa højre Side af Lighedstegnet, men ikke paa venstre Side; da dette er umuligt, maa de samme Primtal i de samme Potenser findes begge Steder.

103. For at opløse et Tal i Primfaktorer dividerer man det først, saa ofte som muligt, med 2, derpaa med 3 og saaledes videre med alle Primtallene.

Dersom man har prøvet saa længe, til den fundne Kvotient er mindre end den brugte Divisor, uden at noget Primtal er gaaet op, er det undersøgte Tal selv et Primtal. Dersom der nemlig var en større Divisor, der gik op, maatte den tilsvarende Kvotient ogsaa gaa op, men dette er umuligt, da man har prøvet med alle Primtal, der ere mindre end eller lig denne Kvotient.

Regningen opskrives saaledes:

2	51900
2	25950
3	12975
5	4325
5	865
	173

173 er ikke delelig med 5, 7, 11, 13 eller 17, og da det sidste Tal giver Kvotienten 10, som er mindre end 17, er 173 et Primtal. Man har altsaa

$$51900 = 2^2 . 3 . 5^2 . 173.$$

104. Dersom man søger st. f. M. for Størrelser (Tal eller Polynomier), der ere opløste eller let kunne opløses i Primfaktorer (irreduktible Faktorer), behøver man blot at udtage de fælles Faktorer i de laveste Potenser, hvori de forekomme. Produktet af disse Faktorer er det

søgte st. f. M.; thi man ser let, at dette ikke kan indeholde andre Faktorer end dem, der findes i alle Størrelserne.

Eks. 1. Et vist Tal er deleligt baade med 30967 og med 36503; der spørges, om det ogsaa er deleligt med de to Tals Produkt.

Eks. 2. $a^5 - a$, hvor a er et helt Tal, er delelig med 30. Man har nemlig $a^5 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$. $a - 1$, a og $a + 1$ ere tre paa hinanden følgende Tal i Talrækken; af disse er mindst eet deleligt med 2 og eet med 3; altsaa gaar 6 op i $a^5 - a$. Dersom Tallet 5 ikke gaar op i $a - 1$, giver det ved Divisjon deri til Rest 1, 2, 3 eller 4; i det første Tilfælde giver a Resten 2, $a^2 + 1$ Resten $2^2 + 1 = 5$; i det andet Tilfælde giver a Resten 3, $a^2 + 1$ Resten $3^2 + 1 = 10$; i det tredje og fjerde Tilfælde gaar 5 op i henholdsvis $a + 1$ og a. 5 og 6 og følgelig 30 gaa derfor op i $a^5 - a$.

Eks. 3. St. f. M. for $2^3.5^2.7$, $2^2.5.11$ og $2^4.5^3.13$ er $2^2.5$.

105. **Mindste fælles Multiplum** for flere Størrelser er det mindste Tal (det Polynomium af laveste Grad), i hvilket de alle gaa op. Det maa indeholde alle de givne Størrelsers Primfaktorer (irreduktible Faktorer); man finder det derfor, naar Størrelserne ere opløste i Faktorer, ved at danne Produktet af alle de forekommende Primfaktorer med de højeste Eksponenter, de findes med.

Eks. 1. M. f. Mp. for Tallene ovenfor er $2^4.5^3.7.11.13$.

Eks. 2. M. f. Mp. for $(a + b)^3(a - b)$, $3a^3(a + b)(a - b)$ og $6a(a + b)^2$ er $6a^3(a + b)^3(a - b)$.

106. Produktet af to Tal er lig Produktet af deres st. f. M. og deres m. f. Mp.

Opløses nemlig Tallene i Faktorer, udtager man af disse, naar man danner m. f. M., netop de Faktorer, som man ikke tager med, naar man danner st. f. M. I Produktet af st. f. M. og m. f. Mp. findes derfor netop de samme Faktorer som i Tallenes Produkt.

107. Man kan finde m. f. Mp. for to Størrelser ved at dividere deres Produkt med deres st. f. M. (106). Denne Metode anvendes, naar Størrelserne ikke ere opløste i og ikke let kunne opløses i Faktorer.

Eks. $3x^2 - x - 2$ og $x^3 - 1$; st. f. M. er $x - 1$, m. f. Mp. er $(3x^2 - x - 2)(x^3 - 1):(x - 1) = (3x + 2)(x^3 - 1)$.

Har man flere Størrelser, søges først m. f. Mp. for de to, derpaa for det udkomne og den tredje, o. s. v. Oftest kan man med Fordel benytte den først fundne fælles Faktor til at opløse Størrelserne i Faktorer.

Eks. $x^2 - 3x + 2$; $x^2 - 5x + 4$; $x^2 - 6x + 8$.

De to første Størrelser have $x - 1$ til st. f. M. Derved opløses de i

$$(x - 1)(x - 2) \text{ og } (x - 1)(x - 4);$$

med de her forekommende Faktorer divideres den tredje Størrelse, der derved skrives $(x - 2)(x - 4)$; det søgte m. f. Mp. er da

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4).$$

Eksempler til Øvelse.

Forkort Brøkerne

1. $\frac{756}{988}$; 2. $\frac{13284}{41148}$; 3. $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

4. $\frac{5x^2 + 7x - 6}{2x^3 - 5x + 6}$; 5. $\frac{3x^3 - x - 2}{2x^3 - x^2 - 1}$;

6. $\dfrac{3x^5 - 10x^3 + 15x + 8}{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6}$; **7.** $\dfrac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$;

8. $\dfrac{2x^3 + (2a - 9)x^2 - (9a + 6)x + 27}{2x^3 - 13x + 18}$;

9. $\dfrac{a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3}{2a^2bx^2y - ab^2xy^2 - b^3y^3}$.

10. St. f. M. for $x^4 - 10x^2 + 9$, $x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 10x - 21$ og $x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 4x + 21$.

11. Opløs i Primfaktorer Tallene 1024, 588, 103, 1872, 713 og 1001.

12. $\dfrac{1}{6x^2 - x - 1} - \dfrac{1}{2x^2 + 3x - 2}$.

13. $\dfrac{1}{x^2 - 4a^2} + \dfrac{1}{(x + 2a)^3} + \dfrac{1}{(x - 2a)^3}$.

14. $\dfrac{1}{x^3 - x} - \dfrac{1}{x^3 - 1} - \dfrac{1}{x^3 + 1}$.

15. $\dfrac{1}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} - \dfrac{1}{x^3 - 10x^2 + 31x - 30}$
$+ \dfrac{3}{x^3 - 11x^2 + 38x - 40}$.

16. Hvilken Rest giver Tallet 1111111111 ved Divisjon med 99? Divisjonen maa ikke udføres.

17. Et Tal trækkes fra et andet, der skrives med de samme Cifre i modsat Orden; af Differensen udslettes et Ciffer; de tiloversblevne Cifre have Summen 41 (a); hvilket Ciffer er slettet?

18. Bevis, at Tallene a, $2a$, $3a$, ... $(p - 1)a$ give lutter forskellige Rester ved Divisjon med Primtallet p, der ikke gaar op i a.

19. Bevis, at dersom Primtallet p ikke gaar op i a, gaar det op i $1 . 2 . 3 \ldots (p - 1)a^{p-1} - 1 . 2 . 3 \ldots (p - 1)$.

20. Bevis, at dersom Primtallet p ikke gaar op i a, gaar det op i $a^{p-1} - 1$. (Fermats Sætning).

Decimalbrøk.

108. En Brøk, hvis Nævner er en Potens af 10, kaldes en Decimalbrøk. Man skriver den ved at skrive Tælleren og af denne ved et Komma afskære saa mange Cifre fra højre (Decimaler), som Nævneren har Nuller. Har Tælleren ikke Cifre nok, kan man sætte Nuller foran den, da disse ingen Betydning have.

Eks. $\frac{153}{100} = 1{,}53$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$; $\frac{115}{10} = 11{,}5$;

$0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}0031 = \frac{31}{10000}$; $0{,}371 = \frac{371}{1000}$.

109. Et Nul, der føjes efter en Decimalbrøk, forandrer ikke dens Værdi, da baade Tæller og Nævner derved multipliceres med 10. Saaledes er

$$0{,}7 = 0{,}70 = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0{,}700 = \frac{700}{1000} = \frac{7}{10}.$$

110. Det Ciffer, der staar foran Kommaet, angiver Tallets Enere; de andre Cifre faa for hver Plads, man rykker til højre, en 10 Gange lavere, for hver Plads, man rykker til venstre, en 10 Gange højere Værdi.

Man har nemlig f. Eks.

$$27{,}35 = \frac{2735}{100} = \frac{2000 + 700 + 30 + 5}{100}$$

$$= 20 + 7 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100},$$

og paa lignende Maade ses Sætningen at gælde for enhver Decimalbrøk. Paa Pladsen efter Kommaet staa altsaa Tiendedele, paa den næste Plads Hundrededele, o. s. v. Decimalbrøkerne danne derfor en naturlig Udvidelse af Tal, skrevne i Titalsystemet. Man kommer til dem ved at ophæve den Vedtægt, at Enerne staa paa den sidste

Plads, og erstatte den ved den, at Enerne staa paa den sidste Plads foran Kommaet. De andre Cifres Værdi bestemmes da efter den samme Regel, som gælder for Titalsystemet.

111. **Addition og Subtraktion** af Decimalbrøker udføres ved, at man sætter Kommaerne under hinanden, regner som med hele Tal og sætter Komma i Resultatet under de andre Kommaer.

De tomme Decimalpladser kunne udfyldes med Nuller; ved et helt Tal kan Komma sættes efter det sidste Ciffer.

Idet Kommaerne komme under hinanden, komme nemlig de ensbenævnte Enheder under hinanden; da nu 10 Enheder paa en hvilken som helst Plads udgøre een Enhed af den nærmest højere Art, maa Regningen blive som ved hele Tal (Mente, laane).

Eks. $13{,}07 + 5{,}376 = 18{,}446$; $17{,}1 - 8{,}437 = 8{,}663$; $1 - 0{,}51 = 0{,}49$; $12 + 0{,}0041 - 6{,}00003 + 0{,}1 - 5{,}92 + 1{,}7 = 1{,}88407$.

112. **Multiplikation.** Man multiplicerer to Decimalbrøker ved at multiplicere dem som hele Tal uden Hensyn til Kommaet og derpaa i Produktet afskære saa mange Decimaler, som Faktorerne have tilsammen.

Idet Kommaerne bortkastes, ere de Tal, der nu staa, Tællerne. Ere disse a og b, og har den ene Faktor m, den anden p Decimaler, ere de to Decimalbrøker

$$\frac{a}{10^m} \text{ og } \frac{b}{10^p} \text{ med Produktet } \frac{ab}{10^{m+p}}.$$

Produktet har altsaa $m+p$ Decimaler, og dets Tæller er dannet ved Multiplikation af de givne Tællere.

Er den ene Faktor et helt Tal, faar Produktet saa mange Decimaler, som den anden Faktor har.

Eks. 0,7.0,003; man har $7 . 3 = 21$; afskæres heri 4 Decimaler, har man 0,0021. $1{,}2 . 0{,}6 = 0{,}72$;

$$5 . 0{,}04 = 0{,}2;\ 0{,}1^3 = 0{,}001;$$

$$0{,}2^3 . 5 . 0{,}04 . 0{,}03^2 . 0{,}1 . 0{,}2 . 11 = 0{,}0000003168.$$

Særlig mærkes, at man multiplicerer en Decimalbrøk med 10^n ved at flytte Kommaet n Pladser til højre; derved blive nemlig alle Enhederne 10^n Gange større.

113. **Divisjon.** Man dividerer en Decimalbrøk med et helt Tal som om Dividenden var et helt Tal, idet man blot erindrer at sætte Komma i Kvotienten, naar man er kommen til Kommaet i Dividenden (før man trækker Tiendedelene ned). Metodens Rigtighed indses som ved hele Tal. Skal man f. Eks. dividere 7 i 0,0133, faar man først 0 Enere, 0 Tiendedele, 0 Hundrededele; til Resten 1 Hundrededel trækkes nu 3 Tusendele ned, hvorpaa man har 13 Tusendedele; i Kvotienten faar man nu 1 Tusendedel o. s. v.; man faar saaledes

$$0{,}0133 : 7 = 0{,}0019.$$

Dersom Divisjonen ikke gaar op, kan man føje Nuller til Dividenden og fortsætte Divisjonen, saa længe man vil; Resultatet kan da ikke udtrykkes nøjagtig ved Decimalbrøk, men man kan fortsætte Divisjonen saa længe, til Fejlen er mindre end enhver nok saa lille, given Størrelse.

Man dividerer med 10^n ved at flytte Kommaet n Pladser til venstre.

Eks. $0{,}025 : 5 = 0{,}005$; $1{,}25 : 25 = 0{,}05$;

$$0{,}012342 : 17 = 0{,}000726;\ 0{,}5 : 100 = 0{,}005.$$

114. Dersom en Decimalbrøk skal divideres med en anden Decimalbrøk, er der to Tilfælde mulige. Ønskes Resultatet i Form af en almindelig

Brøk, flytter man Kommaet saa mange Pladser til højre i Divisor og Dividend, som der er Decimaler i den, der har flest; dette er tilladt, fordi man derved multiplicerer Divisor og Dividend med samme Potens af 10. Da Divisor og Dividend nu begge ere hele Tal, kan Kvotienten skrives som en almindelig Brøk og om muligt forkortes.

Eks. $\frac{0,5}{1,25} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$; $\frac{1,02}{3,4} = \frac{102}{340} = \frac{3}{10}$.

Dersom man ønsker Kvotienten som Decimalbrøk, flyttes Kommaet saa mange Pladser til højre i Divisor og Dividend, som Divisor har Decimaler; Divisor er da et helt Tal, og man benytter Reglen ovenfor (113).

Eks. $\frac{0,516}{1,2} = \frac{5,16}{12} = 0,43$; $\frac{0,4}{0,25} = 1,6$;

$$\frac{0,2^2 - 0,16^2}{0,36} = 0,04.$$

115. **Brøkers Forvandling til Decimalbrøker.** Er en Brøks Nævner ikke en Potens af 10, kan Tælleren skrives som en Decimalbrøk, idet man tilføjer et Komma og Nuller; udføres nu Divisjonen med Nævneren, som ovenfor lært, faas Brøken udtrykt som Decimalbrøk. Dersom Divisjonen gaar op, siges Brøken at være forvandlet til en sluttet Decimalbrøk; dersom Divisjonen ikke gaar op, faar man en uendelig Decimalbrøk. En uendelig Decimalbrøk kaldes periodisk, dersom de samme Cifre stadig komme igen i samme Orden; de Cifre, der stadig gentages, danne da en Periode. Dersom Perioden begynder straks efter Kommaet, kaldes Brøken rent periodisk; kommer der først nogle Cifre, der ikke høre til Perioden, kaldes Brøken blandet periodisk.

116. De uendelige Decimalbrøker, der dannes ved Forvandling af almindelige Brøker, ere altid periodiske.

Dersom Nævneren er n, kan man nemlig ved Divisjonen, da den ikke gaar op, ikke faa andre Rester end $1, 2, 3, \ldots n - 1$. Saa snart man faar en Rest, som man har haft tidligere (efter at man har begyndt at trække Nuller ned), kan man standse Divisjonen; thi man trækker nu som forrige Gang, man havde Resten, et Nul ned; man maa altsaa faa samme Ciffer i Kvotienten, derpaa atter samme Rest som forrige Gang, o. s. v. Da man, naar Divisor er n, kan faa højst $n - 1$ forskellige Rester, maa Perioden faa højst $n - 1$ Cifre. I de følgende Eksempler er der sat en Streg over Perioden.

Eks. $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{3}{16} = 0{,}1875$;

$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{200} = 0{,}005$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$;

$\frac{1}{6} = 0{,}1\bar{6}66\ldots$; $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}428\ldots$; $\frac{2}{11} = 0{,}\overline{18}18\ldots$

117. **Decimalbrøkers Forvandling til alm. Brøker.** En sluttet Decimalbrøk skrives som alm. Brøk og forkortes. En uendelig Decimalbrøk, der ikke er periodisk, kan kun forvandles med Tilnærmelse, idet man medtager saa mange Cifre, som man behøver efter den Nøjagtighed, man ønsker, og behandler Brøken som en sluttet Decimalbrøk.

En rent periodisk Decimalbrøk er lig en Brøk, hvis Tæller er Perioden, og hvis Nævner skrives med saa mange Cifre 9, som der er Cifre i Perioden.

Har man f. Eks.

$$x = 0,\overline{371}371\ldots,$$

faar man ved Multiplikation med 10^3

$$1000x = 371,371\ldots$$

og derpaa ved Subtraktion

$$999x = 371;\ x = \frac{371}{999}.$$

Var Decimalbrøken

$$x = 0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

fik man ved Multiplikation med 10^n

$$10^n x = a_1 a_2 \ldots a_n,\ \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \ldots$$

og ved Subtraktion

$$(10^n - 1)\,x = a_1 a_2 \ldots a_n;$$

$$x = \frac{a_1\, a_2 \ldots a_n}{10^n - 1}$$

hvor Tælleren netop er Perioden, medens Nævneren skrives med Cifret 9 n Gange.

Tælleren er naturligvis ikke at forstaa som et Produkt, men som et Tal, skrevet i Titalsystemet med Cifrene $a_1,\ a_2, \ldots a_n$.

E n b l a n d e t p e r i o d i s k D e c i m a l b r ø k gøres rent periodisk ved Multiplikation med en Potens af 10, forvandles nu efter Reglen ovenfor og divideres derpaa med den benyttede Potens af 10.

$$x = 0,31\overline{425}425\ldots;\ 100x = 31,\overline{425}\ldots = 31\frac{425}{999};$$

$$x = \frac{31\,.\,999 + 425}{99900} = \frac{31425 - 31}{99900}$$

$$x = 0,b_1 b_2 \ldots b_p \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots a_n \ldots;$$

$$10^p x = b_1 b_2 \ldots b_p, \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots$$

$$= b_1 b_2 \ldots b_p + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n - 1};$$

$$x = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p (10^n - 1) + a_1 a_2 \ldots a_n}{10^p (10^n - 1)}$$
$$= \frac{b_1 b_2 \ldots b_p a_1 a_2 \ldots a_n - b_1 b_2 \ldots b_p}{10^p (10^n - 1)}.$$

118. Vi kunne nu se, hvilke Brøker der føre til de tre forskellige Slags Decimalbrøker, idet disse ved at forvandles og forkortes maa føre tilbage til de almindelige Brøker, af hvilke de ere dannede.

De sluttede Decimalbrøker faa ved Forvandlingen Nævnere (10^n), der kun indeholde Primfaktorerne 2 og 5, og altsaa vil Forkortning kun kunne føre til Brøker, hvis Nævnere alene indeholde disse Primfaktorer. Omvendt vil en Brøk, hvis Nævner kun indeholder Primfaktorerne 2 og 5, forvandles til en sluttet Decimalbrøk, naar Nævner og Tæller multipliceres med en passende Potens af 2 eller 5.

Eks. $\frac{7}{2^3 . 5} = \frac{7 . 5^2}{2^3 . 5^3} = \frac{175}{10^3} = 0{,}175;$

$\frac{3}{25} = \frac{3}{5^2} = \frac{3 . 2^2}{10^2} = 0{,}12.$

De blandet periodiske Decimalbrøker forvandles til Brøker, hvis Nævnere ere $10^p(10^n - 1)$, hvor 10^p kun indeholder Primfaktorerne 2 og 5, $10^n - 1$ kun andre Primfaktorer. $10^n - 1$ kan ikke forkortes helt bort, thi Decimalbrøken var da sluttet; 10^p kan heller ikke forkortes helt bort, da Tælleren i x kun kan ende paa Nul, dersom $a_n = b_p$, men hvis dette var Tilfældet, maatte Perioden begynde med b_p og ikke med a_1. De blandet periodiske Decimalbrøker føre derfor til Brøker, hvis Nævnere indeholde mindst een af Faktorerne 2 og 5 og desuden andre Faktorer.

De rent periodiske Decimalbrøker føre ved

Forvandlingen til Brøker, hvis Nævnere ($10^n - 1$) ikke indeholde Primfaktorerne 2 og 5. Omvendt maa alle saadanne Brøker give rent periodiske Decimalbrøker, thi dersom de gav blandet periodiske, maatte 2 eller 5 findes i Nævneren, som vi viste det ovenfor. Heraf ses tillige, at den forrige Sætning kan vendes om, thi Brøker, i hvis Nævnere findes 2 eller 5 og andre Faktorer, kunne hverken give sluttede eller rent periodiske Decimalbrøker.

Eksempler til Øvelse.

1. $0{,}3 \,.\, 4{,}1 - 0{,}49 : 0{,}07 + 5 : 0{,}25 - 3 \,.\, 2{,}141 - 7{,}807.$

2. $\frac{2}{5}, \frac{7}{16}, \frac{19}{2}, \frac{25}{8}, \frac{4}{7}, \frac{9}{11}, \frac{37}{99}, \frac{1}{999}, \frac{5}{6}, \frac{10}{13}, \frac{5}{18}, \frac{37}{40}$ forvandles til Decimalbrøker.

3. $0{,}75$; $4{,}312$; $0{,}136$; $0{,}\overline{12}12\ldots$; $0{,}0025$; $0{,}1\bar{6}6\ldots$; $0{,}\bar{6}6\ldots$; $3{,}4\overline{25}25\ldots$; $1{,}\overline{142857}142\ldots$; $0{,}13\overline{006}006\ldots$ forvandles til almindelige Brøker.

4. $\frac{0{,}5^3 - 0{,}04^3}{0{,}46}$; $\frac{1{,}2^3 + 0{,}13^3}{1{,}33} - 1{,}07^2 + 0{,}39 \,.\, 1{,}2.$

5. $\frac{17{,}1^2 + 0{,}2 \,.\, 5 : 1{,}25}{0{,}011} - \frac{0{,}3^2 - 1{,}4^2}{1{,}7}$ beregnes med 3 Decimaler.

6. $\frac{1.2^4 - 0{,}803^4}{1{,}44 + 0{,}803^2} - 2{,}003 \,.\, 0{,}397.$

7. Søg x af $0{,}14\,(x - 0{,}6) = 2{,}4\,(x - 1{,}1) + 0{,}07.$

8. $\frac{x - 0{,}12}{1{,}11} - \frac{2x - 1{,}34}{1{,}12} = \frac{x + 2{,}47}{3{,}7} - 1.$

Uendelig og Ubestemt.

119. **Uendelig stor og uendelig lille.** Vi have i det foregaaende lært at udføre de forskellige Regninger med alle Tal, saaledes at vi, naar de opgivne Størrelser ere Tal, altid komme til et Resultat, der er et helt Tal eller en Brøk. Der er dog een Undtagelse, som vi nu ville betragte nærmere. Man kan nemlig ikke dividere 0 i et Tal a (som ikke er Nul), da der ikke gives noget Tal, som multipliceret med 0 giver a. Tænke vi os imidlertid, at vi i Stedet for med 0 dividere med et meget lille Tal, kan Divisjonen udføres, og vi faa en meget stor Kvotient; jo mere Divisor nærmer sig til Nul, desto større bliver Kvotienten, og vi kunne altid gøre Divisor saa lille, at Kvotienten bliver større end ethvert opgivet Tal, hvor stort det end er. I Ligningen

$$\frac{a}{b} = c$$

vil c altsaa vokse ud over enhver given Grænse, naar vi holde a uforandret, men lade b nærme sig mere og mere til 0. Man udtrykker dette ved at skrive

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

hvor Tegnet ∞ læses «uendelig». ∞ betegner altsaa ikke en bestemt Størrelse, men derimod en, som tænkes voksende uden Grænse, medens 0 da betegner en Størrelse, der tænkes aftagende mod Nul uden Grænse, en saakaldet «uendelig lille» Størrelse. Tegnet 0 faar altsaa egentlig to Betydninger, nemlig som hidtil «Intet» og den uendelig lille Størrelse. Det absolute Nul spiller imidlertid ingen Rolle, saa at vi for Fremtiden tænke os 0 som den uendelig lille Størrelse; de tidligere udviklede Formler forandres ikke derved, men faa kun en lidt for-

andret Betydning. Naar vi saaledes skrive $a + 0 = a$, betyder dette nu: naar vi i en Sum af to Addender lade den ene aftage uden Grænse, vil Summen kunne bringes til, saa nær som man vil, at være lig den anden Addend. I $0 . a = 0$ staar der egentlig: Naar den ene Faktor i et Produkt aftager uden Grænse, aftager Produktet selv uden Grænse, ligesom $\frac{a}{0} = \infty$ betyder, at Kvotienten vokser uden Grænse, naar Divisor aftager uden Grænse, og ligesom $\frac{a}{\infty} = 0$ betyder, at Kvotienten aftager uden Grænse, naar Divisor vokser uden Grænse, eller, hvad der er det samme, at man altid kan gøre Divisor saa stor, at Kvotienten bliver mindre end en hvilken som helst, nok saa lille, given Størrelse.

120. Vi opnaa ved Indførelsen af Tegnet ∞, at vi i det Tilfælde, hvor en Opgave er umulig, faa noget mere at vide om den. Saaledes fik vi af de to Ligninger i 69

$$ax + by = c; \quad mx + ny = p$$

$$(na - mb)\,x = nc - bp; \quad x = \frac{nc - bp}{na - mb},$$

hvor vi dog, idet vi dividerede med Parentesen, maatte forudsætte, at $na - mb$ ikke var Nul. Nu behøve vi ikke at gøre denne Forudsætning, thi vi faa nu i dette Tilfælde $x = \infty$ og lære deraf, at Opgaven er umulig, men tillige, at dersom vi forandre de givne Størrelser meget lidt, saa at $na - mb$ bliver lidt forskellig fra 0, vil x faa en meget stor Værdi, og at man altid kan gøre Forandringen saa lille, at x bliver større end en hvilken som helst given Størrelse. Alt dette vil man ikke gentage hver Gang ved lignende Opgaver, og derfor udtrykker man det kort ved at sige, at x er uendelig.

121. **Ubestemt.** Vi forudsatte hidtil, at Dividenden ikke var 0. Vi have altsaa tilbage at undersøge Udtrykket $\frac{0}{0}$, der betegner den Værdi, som en Brøk nærmer sig mere og mere til (dens Grænseværdi), naar Tælleren og Nævneren begge aftage uden Grænse. Man indser imidlertid let, at man ikke her nærmer sig til nogen bestemt Størrelse, da vi efter Behag kunne lade Tælleren eller Nævneren aftage stærkest. Vi sige derfor, at $\frac{0}{0}$ er «ubestemt»; dette stemmer med, at Prøven viser Rigtigheden af Ligningen

$$\frac{0}{0} = a,$$

hvilken Værdi vi end tillægge a.

Den Værdi, vi fik for x af de to Ligninger ovenfor, passer nu for alle Tilfælde, idet den, naar Brøkens Tæller og Nævner begge blive Nul, viser, at x er ubestemt; dette stemmer med, hvad vi viste tidligere (70), nemlig at vi i dette Tilfælde ikke kunne bestemme de ubekendte, da vi kun have een Ligning.

122. **Den sande Værdi af en ubestemt Størrelse.** Ligningen

$$\frac{0}{0} = \text{ubestemt}$$

er altsaa et kort Udtryk for den Sætning: Dersom en Brøks Tæller og Nævner aftage uden Grænse, kan Brøkens Værdi derved nærme sig mere og mere til et hvilket som helst Tal. Man ser, at vi her forudsætte, at vi kunne lade Tælleren og Nævneren nærme sig til Nul, saaledes som vi selv ville; Sætningen gælder derfor ikke, dersom den ene af Størrelserne skal nærme sig til Nul paa en bestemt Maade, naar den anden nærmer sig til Nul. Dersom vi f. Eks. i Brøken

$$\frac{3a}{a}$$

lade Nævneren a nærme sig til Nul, vil Tælleren af sig selv samtidig nærme sig til Nul. Hvor lille vi end gøre a, vil Brøkens Værdi stadig være 3, saa at den ikke er ubestemt, naar a er Nul. Vi slutte heraf følgende:

Dersom en Brøks Tæller og Nævner nærme sig til Nul (ere uendelig smaa), er Brøken ubestemt, dersom Tælleren og Nævneren ere uafhængige af hinanden; men den har en bestemt Værdi, dersom Tælleren og Nævneren maa rette sig efter hinanden. Denne Værdi kaldes den sande Værdi af den tilsyneladende ubestemte Størrelse.

123. Dersom to Størrelser ere lige store for alle Værdier af et af de forekommende Bogstaver, undtagen for en Værdi, der gør den ene Størrelse ubestemt, men giver den anden en bestemt Værdi, da er denne den ubestemte Størrelses sande Værdi.

Lad os f. Eks. betragte de to Brøker

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} \text{ og } \frac{x+2}{x+3}.$$

Da den anden Brøk dannes af den første ved Forkortning, ere de to Brøker lige store for alle Værdier af x. Herfra maa dog undtages Værdien $x = 1$, der gør den første Brøk ubestemt, men giver den anden Værdien $\frac{3}{4}$. Denne er da den sande Værdi af den første Brøk for $x = 1$.

Vi skulle nemlig, efter hvad vi have lært, for at finde den sande Værdi tænke os x nærmende sig mere og mere til 1 (nemlig $x - 1$ til 0); da nu de to Brøker ere lige store, hvor lille en Værdi vi end indsætte for $x - 1$, kunne vi lige saa godt tænke os x nærmende sig til 1 i den anden Brøk; derved nærmer denne sig til $\frac{3}{4}$, som altsaa er den søgte sande Værdi.

Da vi nu vide (55), at dersom en Brøks Tæller bliver Nul for en Værdi af x, f. Eks. for $x = a$, vil $x - a$ være Faktor i Tælleren, og da det samme gælder om Nævneren, se vi, at en Brøk kun kan blive ubestemt for en vis Værdi af et af Bogstaverne, dersom den kan forkortes; man finder altsaa en Brøks sande Værdi ved først at forkorte den og derpaa indsætte den givne Værdi. Er det for $x = a$, at Brøken bliver ubestemt, vil den kunne forkortes med $x - a$; bliver den derefter endnu ubestemt for $x = a$, kan den atter forkortes med $x - a$, o. s. v.

I de følgende Eksempler antage vi, at de Størrelser, der betegnes ved forskellige Bogstaver, kunne forandre sig uden at rette sig efter hinanden.

Eks. 1. Hvad er $\frac{y - b}{x - a}$ for $y = b$ og $x = a$?

2. Hvad er $\frac{x^2 - a^2}{(x - a)^2}$ for $x = a$?

3. Hvad er $\frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1}$ for $x = 1$?

4. Hvad er $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ for $h = 0$?

5. En Kureer rejser ud fra en By A. og rejser a Mil om Dagen; en anden Kureer rejser samtidig samme Vej fra en By B., der ligger n Mil foran A., og rejser b Mil om Dagen. Efter hvor mange Dage støde de sammen? Hvilke forskellige Tilfælde kunne indtræffe?

Efter x Dage har den første Kureer rejst ax, den anden bx Mil; støde de nu sammen, maa den første have rejst n Mil flere end den sidste; altsaa er

$$ax = n + bx; \quad x = \frac{n}{a - b}.$$

For $a > b$ er Svaret positivt; de støde sammen om saa mange Dage. For $a < b$ er Svaret negativt; de ere allerede stødte sammen, før de naaede Byerne, for saa mange Dage siden; de støde altsaa aldrig sammen, dersom de begynde Rejsen ved Byerne; men dersom de blot passere Byerne samtidig paa deres Rejse, har den forreste for saa og saa mange Dage siden indhentet den bageste.

Dersom $a = b$, er $x = \infty$; altsaa naa de aldrig hinanden, men vilde gøre det om en meget lang Tid eller vilde have gjort det for en meget lang Tid siden, dersom den ene forandrede sin Hastighed lidt. Er tillige $n = 0$, bliver Svaret ubestemt; de rejse da sammen hele Tiden.

124. Vi kunne nu ogsaa regne med det indførte Begreb ∞. Saaledes faar man:

$$a \, . \, \infty = \infty, \quad a + \infty = \infty,$$

der udtrykke, at et Produkt (en Sum) vokser uden Grænse, naar den ene Faktor (Addend) vokser uden Grænse;

$$0 \, . \, \infty = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at et Produkt ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar den ene Faktor aftager og den anden vokser uden Grænse;

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at en Brøk ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar dens Tæller og Nævner vokse uden Grænse;

$$\infty - \infty = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at en Differens ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar Subtrahend og Minuend vokse uden Grænse.

Nogle mindre væsentlige Former, nemlig 0^0, 1^∞ og ∞^0, der ogsaa ere ubestemte, ville vi foreløbig forbigaa.

$$a^{\infty} = \infty\ (a > 1) \text{ og } a^{\infty} = 0\ (a < 1)$$

udtrykke, at en Potens af et Tal større end 1 vokser, af et Tal mindre end 1 aftager uden Grænse, naar Eksponenten vokser uden Grænse.

Man finder nemlig ved fortsat Multiplikation med $1 + a$ (a positiv) og Bortkastelse paa højre Side af alle Led, der ere af højere end første Grad, $1 + a = 1 + a$; $(1 + a)^2 > 1 + 2a$; $(1 + a)^3 > 1 + 3a$; ... $(1 + a)^n > 1 + na$, men $1 + na$ bliver større end et vilkaarlig valgt Tal m, naar $n > (m - 1) : a$. Herved er Sætningens første Del bevist, og den anden udledes heraf ved Divisjon i 1.

125. Ved de Størrelser, der ovenfor ere anførte som ubestemte, er det forudsat, at de to Størrelser, der vokse eller aftage uden Grænse, ere uafhængige af hinanden; ere de afhængige af hinanden, ville de ubestemte Udtryk have en sand Værdi, der bestemmes, idet Udtrykket først bringes paa Formen $\frac{0}{0}$. Saaledes kan man i Stedet for $a \,.\, b\ (a = 0;\ b = \infty)$ skrive $a : \frac{1}{b}\ (a = 0,\ \frac{1}{b} = 0)$.

Skal man i en Brøk, hvor Tæller og Nævner ere Polynomier, ordnede efter x, sætte $x = \infty$, divideres først Tæller og Nævner med den højeste Potens af x, der forekommer.

126. Bestemmelsen af en ubestemt Størrelses sande Værdi bliver mere vanskelig, naar man kommer til de ny Former af Størrelsen, som man, efterhaanden som man skrider frem i de matematiske Videnskaber, er nødt til at indføre.

Da disse sande Værdier spille en meget vigtig Rolle ved mange Opgaver, udvikler man Metoder til deres Bestemmelse i en særegen Gren af den rene Matematik, som kaldes Differentialregning.

Aritmetik og Algebra

til Skolebrug

af

Julius Petersen.

II. Irrationale Størrelser.

III. Tillæg.

Femte Udgave.

Kjøbenhavn.

Karl Schønbergs Boghandel.

1892.

Kjøbenhavn. — Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

II. Irrationale Størrelser.

Rod.

1. Det Tal, som opløftet til m^{te} Potens giver a, kalde vi den m^{te} Rod af a; det betegnes

$$\sqrt[m]{a};$$

m kaldes Rodeksponenten, a Potensen.

Vi have altsaa

$$b = \sqrt[m]{a}, \text{ dersom } b^m = a.$$

Af disse to Ligninger faar man

$$\sqrt[m]{b^m} = b; \quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Potensopløftning og Roduddragning kaldes derfor modsatte Regningsarter.

Af Definitionen følger

$$\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}, \text{ thi } \left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Rodeksponenten 2 underforstaas; den 2^{den} Rod kaldes Kvadratrod, den 3^{dje} Rod kaldes Kubikrod.

Eks. $\sqrt[3]{8} = 2$, thi $2^3 = 8$; $\sqrt[m]{1} = 1$, thi $1^m = 1$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{256} = 4$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[-2]{4} = \frac{1}{2}$;

$$\sqrt{a^2b^2} = ab; \quad \sqrt[3]{a^3:b^3} = a:b; \quad \sqrt[4]{a^8b^4} = a^2b;$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b; \quad \sqrt[3]{a^3 - 3a^2 + 3a - 1} = a - 1.$$

2. Opløfter man de hele Tal til m^{te} Potens, faar man Potenstallene af m^{te} Grad; Potenstallene af

anden (1, 4, 9....), tredje (1, 8, 27....) og fjerde Grad (1, 16, 81....) kaldes henholdsvis **Kvadrattal**, **Kubiktal** og **Bikvadrattal**. Den m^{te} Rod af et Potenstal af m^{te} Grad er et helt Tal, medens den m^{te} Rod af ethvert andet Tal ikke kan være et helt Tal. En saadan Rod kan heller ikke være en Brøk, thi en Potens af en uforkortelig Brøk er atter en uforkortelig Brøk (I, 100). Saaledes kan f. Eks. $\sqrt{2}$ ikke være noget helt Tal, da 2 ikke er et Kvadrattal; da nu $\sqrt{2}$ heller ikke kan være en Brøk, kan man ikke finde noget Tal, hvis Kvadrat nøjagtig er 2, men man kan finde et Tal, hvis Kvadrats Forskel fra 2 er mindre end enhver given, selv nok saa lille Størrelse. Saaledes er $1{,}4^2 < 2$, men $1{,}5^2 > 2$; $1{,}41^2 < 2$, men $1{,}42^2 > 2$; $1{,}414^2 < 2$, men $1{,}415^2 > 2$ o. s. v. For hver Decimal, man føjer til, bliver Kvadratets Forskel fra 2 mindre og mindre, og man kan ved en Metode, vi senere lære, drive Tilnærmelsen saa vidt, som man vil. Man kan derfor sige, at $\sqrt{2}$ kan udtrykkes ved en Decimalbrøk med uendelig mange Decimaler. Denne Decimalbrøk kan ikke være periodisk (I, 117).

Saadanne Størrelser, der ikke nøjagtig, men med saa stor Tilnærmelse, som man vil, kunne udtrykkes ved Brøker, kaldes **irrationale**, i Modsætning til de hele Tal og Brøkerne, som kaldes **rationale** Størrelser. I Geometrien viser man, at Diagonalen i et Kvadrat, hvis Side er 1', er $\sqrt{2}'$, og i det Hele taget er det kun undtagelsesvis, at Forholdet mellem to af en Figurs Linier kan udtrykkes ved et rationalt Tal. Andre Anvendelser af Algebraen føre os ligeledes til irrationale Størrelser, og det er derfor nødvendigt at undersøge disse nærmere.

3. Da en irrational Størrelse kan betragtes som en Decimalbrøk med uendelig mange Decimaler, maa alle

de Sætninger, der gælde om Decimalbrøker, hvor mange Decimaler de end have, ogsaa gælde om irrationale Størrelser. I Virkeligheden kan man i Reglen ikke regne med selve de irrationale Størrelser, men man maa som oftest erstatte dem ved rationale Størrelser, der have tilnærmelsesvis samme Værdi. Skal man f. Eks. finde Værdien af $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, kan dette kun gøres med Tilnærmelse, idet man for $\sqrt{2}$ og $\sqrt{3}$ sætter Decimalbrøker; hvor mange Decimaler man skal tage med, beror da paa den Nøjagtighed, som den stillede Opgave af praktiske Hensyn kræver. Regner man med Bogstaver, kan man ikke angive Tilnærmelsesværdierne, og man kan da kun anvende saadanne Sætninger, som gælde almindelig. Saaledes kan Udtrykket $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ikke skrives simplere, saa længe vi ikke for a og b sætte bestemte Tal, og gøre vi det, er det endda kun undtagelsesvis, at Udtrykket kan reduceres.

Rodstørrelser kaldes ensbenævnte, naar de have samme Rodeksponent; de kaldes ensartede, naar de desuden have samme Tal under Rodtegnet.

Vi skulle nu bevise de vigtigste Sætninger, som gælde om Regning med Rodstørrelser.

4. Man kan uddrage en Rod af et Produkt ved at uddrage den af hver Faktor for sig.

$$\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}, \quad \text{thi} \quad \left(\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = ab. \qquad (1)$$

Heraf følger, at en Faktor kan flyttes uden for et Rodtegn, naar man først uddrager Roden af den, og omvendt, at en Faktor kan flyttes ind under Rodtegnet, naar den først opløftes til Potensen; man har nemlig

$$\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m}.\sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}.$$

For at flytte de rationale Faktorer uden for Rodtegnet opløser man Potensen i Primfaktorer, dersom man ikke straks kan se de Faktorer, af hvilke Roden kan uddrages.

Eks. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27.2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2527} = \sqrt{19^2.7} = 19\sqrt{7}$;

$$\sqrt[m]{a^{m+1}b^{m+2}} = ab\sqrt[m]{ab^2};\quad \sqrt{a^2b^3c^4d^5} = abc^2d^2\sqrt{bd};$$

$$\sqrt{3a^2 - 6ab + 3b^2} = (a-b)\sqrt{3}.$$

Af (1) følger endvidere, at man multiplicerer to ensbenævnte Rodstørrelser ved at multiplicere deres Potenser, medens Eksponenten bliver uforandret.

Eks. $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} = 1$;

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b;$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab};$$

$$\sqrt[m]{a^{m-1}b}.\sqrt[m]{ab^{m-1}} = \sqrt[m]{a^m b^m} = ab;$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1;$$

$$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = 30 + 13\sqrt{6};$$

$$(\sqrt{5} + 1)\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2(6 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})} = 4.$$

5. Man kan uddrage en Rod af en Brøk ved at uddrage Roden af Tæller for sig og Nævner for sig.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}},\quad \text{thi}\quad \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Oftest multiplicerer man før Roduddragningen Brøkens Tæller og Nævner med et saadant Tal, at man kan uddrage Roden af Nævneren. Man ser desuden af (2), at

ensbenævnte Rodstørrelser divideres i hinanden ved, at deres Potenser divideres.

$$\text{Eks.}\quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3};\quad \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4.3}{3^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b};\quad \sqrt{5\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\frac{16.3}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{3}{81}} = \frac{\sqrt{3}}{9};\quad \frac{\sqrt[m]{a^4 b^{m+1}}}{\sqrt[m]{a^3 b}} = b\sqrt[m]{a}.$$

6. Skal man udføre en Potensopløftning og en Roduddragning efter hinanden, er Ordnen ligegyldig.

$$\sqrt[m]{a^p} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^p,\ \text{thi}\ \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^p\right)^m = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^p = a^p. \qquad (3)$$

$$\text{Eks.}\quad \sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5;\quad (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}.$$

7. Man uddrager en Rod af en Rod ved at multiplicere Eksponenterne; disses Orden er altsaa vilkaarlig. Omvendt kan en Roduddragning erstattes ved flere andre, naar Eksponenten er et deleligt Tal.

$$\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}},\ \text{thi}\ \left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^m\right)^p = a. \qquad (4)$$

$$\text{Eks.}\quad \sqrt[8]{256} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a};\quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}.$$

8. Potens- og Rodeksponent kunne divideres og multipliceres med samme Tal.

$$\sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[p]{a^q};\ \text{thi}\ \left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^p\right)^m = a^{mq}. \qquad (5)$$

Af 6, 7 og 8 følger, at dersom man skal udføre flere Potensopløftninger og Roduddragninger efter hinanden, er Ordnen ligegyldig; man kan forkorte Potenseksponenterne mod Rodeksponenterne, som om de vare Tællere og Nævner i Brøker, der skulde multipliceres;

er dette gjort, multipliceres alle Rodeksponenterne for sig og alle Potenseksponenterne for sig.

Heraf følger da, at man kan uddrage en Rod af en Potens ved at dividere Rodeksponenten i Potenseksponenten, dersom Divisionen gaar op.

Eks. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[9]{a^3} = \sqrt[12]{a^4}$, osv.

$$\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^4}}\right)^{10} = \sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a}; \quad \sqrt[6q]{(a^{3p})^q} = \sqrt[6]{a^{3p}} = \sqrt{a^p}.$$

9. **Addition og Subtraktion.** Dersom Rodstørrelser ere ensartede, adderes og subtraheres de som andre ensartede Størrelser. Staar der forskellige Tal under Rodtegnene, kan Additionen eller Subtraktionen kun udføres, dersom Rodstørrelserne vise sig at være ensartede, naar de rationale Faktorer ere flyttede udenfor.

Eks. $5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$; $\sqrt{8} + \sqrt{50} = 7\sqrt{2}$;

$$3\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{147} = 14\sqrt{3};$$

$$\sqrt[3]{16} - \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{54} = \tfrac{17}{6}\sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt{a^2m} + \sqrt{b^2m} - \sqrt{a^2m - 2abm + b^2m} = 2b\sqrt{m} \quad (a > b);$$

$$\sqrt{5\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{8\tfrac{1}{3}} + \sqrt{12} - 2\sqrt{\tfrac{1}{75}} + 5\sqrt{2\tfrac{1}{12}} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{16.3}}{3} - \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{25.3}}{3} + 2\sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{5.3} + 5\frac{\sqrt{25.3}}{2.3} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}\left(\tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{6} + 2 - \tfrac{2}{15} + \tfrac{25}{6} - 1\right) = \tfrac{83}{15}\sqrt{3}.$$

10. **Multiplikation og Divisjon.** Man skaffer Rodstørrelserne samme Rodeksponent og kan da anvende Reglerne i 4 og 5. Til fælles Rodeksponent tages Rodeksponenternes mindste fælles Mangefold; i dette divideres hver enkelt Rodeksponent, og med Kvotienten multipliceres Rod- og Potenseksponent. Man maa erindre, at hvor der ingen Potenseksponent staar, er 1 underforstaaet, medens 2 er underforstaaet, hvor der ingen Rodeksponent staar.

Eks. $\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}:\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^2}.\sqrt[6]{a^3}:\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{1} = 1$;

$\sqrt[3]{a^2b}:\sqrt[4]{ab^2}.\sqrt[6]{a^2b} = \sqrt[12]{a^8b^4}:\sqrt[12]{a^3b^6}.\sqrt[12]{a^4b^2} = \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[4]{a^3}$;

$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 8+4\sqrt{3}$; $(-1+\sqrt{5})^2 = 6-2\sqrt{5}$;

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$;

$(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}) = 12(2+\sqrt{6})$;

$$(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}) = 1.$$

11. **Bortskaffelse af irrationale Nævnere.** Man kan altid skaffe en Brøk, i hvis Tæller og Nævner findes Rodstørrelser, rational Nævner. Her ville vi dog kun vise dette for to Tilfældes Vedkommende.

1) Nævneren har Formen $a\sqrt[n]{b}$; man multiplicerer da Brøkens Tæller og Nævner med $\sqrt[n]{b^{n-1}}$. Indeholder b Faktorer i højere end første Potens, multiplicerer man kun med den n^{te} Rod af et saadant Tal, at alle Faktorerne faa Potenseksponenter, der ere delelige med n.

Eks. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{6}}{15}$.

2) Nævneren indeholder kun Kvadratrødder. Er Nævneren $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, multipliceres Tæller og Nævner med $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Er Nævneren $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, multipliceres med $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, hvorved den ny Nævner bliver $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c = a+b-c+2\sqrt{ab}$. Multipliceres nu Tæller og Nævner med $a+b-c-2\sqrt{ab}$, faar man rational Nævner. Har Nævneren flere Led, kan man gaa frem paa samme Maade, idet man hvergang bortskaffer een Rodstørrelse; man maa blot erindre, at man kun skal udføre Multiplikationen af Rodstørrelser, naar Produktet bliver rationalt, da man ellers indfører ny Rodstørrelser; skal man multiplicere $\sqrt{a}$ med $\sqrt{b}$, skriver

man altsaa $\sqrt{a}\sqrt{b}$ og ikke $\sqrt{ab}$. Dersom den Rodstørrelse, som man vil bortskaffe, findes som Faktor i flere Led, sættes den uden for en Parentes.

Eks. $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b};$$

$$\frac{2\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{2+3\sqrt{6}} = \frac{-50\sqrt{3}}{-50} = \sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{11+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6}$$

$$= \frac{35+24\sqrt{6}-28\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{23};$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})},$$

hvor Tæller og Nævner multipliceres med

$$1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}),$$

hvorved den ny Nævner bliver $-27-20\sqrt{2}$, o. s. v.

12. **Rodtegns Bortfjærnelse af Ligninger.** Dersom en Ligning indeholder en enkelt Rodstørrelse, isoleres denne, og man opløfter de to lige store Størrelser til den samme Potens. Er der flere Kvadratrødder, isoleres en af disse, og man kvadrerer paa begge Sider, idet man gaar frem som ved Bortskaffelse af irrationale Nævnere for ikke at føre ny Rodstørrelser ind. Ere Rodstørrelserne bortskaffede, siges Ligningen at være bragt paa rational Form. Dette kan altid gøres, hvor mange Rodstørrelser der end findes, men vi ville her ikke betragte andre Tilfælde end de nævnte. Bekendte Rodstørrelser bortskaffes ikke af Ligningen.

Eks. $\sqrt{x-4}+\sqrt{2}=1$; $\sqrt{x-4}=1-\sqrt{2}$;

$x-4=3-2\sqrt{2}$; $x=7-2\sqrt{2}$.

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}+\sqrt{x-\tfrac{1}{2}}=2;$$
$$x+\tfrac{1}{2}=(2-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}})^2=x+\tfrac{7}{2}-4\sqrt{x-\tfrac{1}{2}};$$
$$4\sqrt{x-\tfrac{1}{2}}=3;\quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{9}{16}=\tfrac{17}{16}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $5\sqrt{8}-\sqrt{12}+3\sqrt{2}-2\sqrt{75}+\sqrt{200}-3\sqrt{147}-\sqrt{48}$.
2. $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{32}:\sqrt[4]{8}:\sqrt[12]{2}$.
3. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2$.
4. $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}$.
5. $\tfrac{2}{3}\sqrt{4\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{12\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{\tfrac{1}{8}}-\sqrt{8}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{25}{18}}$.
6. $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{72}}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}$.
7. $\sqrt[m]{a^{m+3}}-b\sqrt[m]{a^{2m+3}}+c\sqrt[m]{a^{pm+3}}$.
8. $\sqrt[4]{a^{13}b^{15}}-2\sqrt[4]{a^9b^3}-3\sqrt[4]{ab^7}+ab\sqrt[4]{a^5b^3}$.
9. $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$.
10. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}:\sqrt{a+b}\,.\sqrt{2a-2b}\,.\sqrt{\tfrac{9}{2}}$.
11. $\sqrt{2a^2+4ab+2b^2}-\sqrt{2a^2-4ab+2b^2}$.
12. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5$. Find x.
13. $(2-\sqrt{3}):(7-4\sqrt{3})(3+\sqrt{3}):(3-\sqrt{3})$.
14. $\left[\sqrt{\dfrac{a^2b}{a^3b^{-2}}}\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2}}:\sqrt[6]{\dfrac{(a^2b)^2}{ab^{-1}}}\right]^3:\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^3}$.
15. $\dfrac{2+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$. 16. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.
17. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^3}$.
18. $\sqrt{4x^2+x+4}+2x=5$. Find x.
19. Hvad er $k\sqrt{4-\left(\dfrac{k}{r}\right)^2}$, naar $k=\dfrac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$?

20. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$.

21. $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$.

22. $\sqrt{5x+10}=2+\sqrt{5x}$.

23. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{3x}-1}{2}$.

24. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

25. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}$.

26. $(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[4]{xy^3}+\sqrt[5]{xy^4})(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[5]{x^4y})$.

27. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{15}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}$.

28. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}=9$.

29. $\sqrt{3+\sqrt{5}}:\sqrt{3-\sqrt{5}}\,\sqrt{7+3\sqrt{15}}$.

30. $(a+\sqrt{a^2-b})^2\,(a-\sqrt{a^2-b})^2$.

Brudne Eksponenter.

13. Efter vor Definition af Potens har $a^{\frac{p}{q}}$ ingen Betydning, undtagen naar q gaar op i p. I dette Tilfælde er

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}. \tag{4}$$

Vi vedtage nu i alle Tilfælde at lade $a^{\frac{p}{q}}$ betyde $\sqrt[q]{a^p}$; Rodstørrelser kunne derved skrives som Potenser, og vi skulle vise, at man kan regne med disse Potenser efter de samme Regler, som gælde, naar Eksponenterne ere hele Tal:

1. $a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

2. $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

3. $(ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p}\sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} . b^{\frac{p}{q}}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.

5. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[qs]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}}$.

Vort Potensbegreb er herved saaledes udvidet, at Eksponenten kan være et hvilket som helst helt eller bruddent, positivt eller negativt Tal. Eksponenten kan da ogsaa være irrational, idet vi i saa Fald ved Potensen forstaa den Størrelse, til hvilken vi nærme os mere og mere, naar vi for Eksponenten sætte Brøker, der nærme sig mere og mere til den irrationale Eksponents Værdi.

Eks. $2^{\frac{1}{2}} . 2^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{6}} = 2$; $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} : (a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $\sqrt[\infty]{a} = a^0 = 1$; $\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}$.

Kvadratrodsuddragning.

14. Vi skulle nu vise, hvorledes man kan finde Kvadratroden af et helt Tal med saa stor Nøjagtighed, som man vil; vi ville først vise, hvorledes den findes saa nøjagtig, at Fejlen er mindre end 1 (med Fejlgrænsen 1). For et Tal med et eller to Cifre kan Kvadratroden straks bestemmes med den angivne Nøjagtighed, idet man kender de første Kvadrattal

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100....

15. **Kvadratroden af Tal med 3 eller 4 Cifre.** Disse Tal ligge mellem 10^2 og 10^4; det søgte Tal maa derfor ligge mellem 10 og 10^2 og er altsaa et tocifret Tal; vi ville betegne Cifrene ved a og b; Tallet er da $10a+b$. Dersom det givne Tal er N, maa man have

$$N = (10a + b)^2 + R,$$

hvor R betegner Resten, det vil sige Forskellen mellem det givne Tal og det nærmest lavere Kvadrattal. Ligningen

$$N = 100a^2 + 20ab + b^2 + R$$

viser nu, at man maa have

$$N > 100a^2, \text{ hvoraf } a < \sqrt{\frac{N}{100}}.$$

Da a er et helt Tal, kan man for $N:100$ tage det Tal, som man faar ved at bortskære det givne Tals Tiere og Enere; da man derved faar et Tal med et eller to Cifre, er a bekendt. Er saaledes $N = 536$, bliver $a < \sqrt{5}$, altsaa $a = 2$; er $N = 8738$, bliver $a < \sqrt{87}$, altsaa $a = 9$.

Naar a er fundet, faar man

$$\frac{N - 100a^2}{20a} = b + \frac{b^2 + R}{20a}.$$

Da her den sidste Brøk oftest er mindre end 1, kan man med Tilnærmelse sætte

$$\frac{N - 100a^2}{20a} = b;$$

er b derved fundet, findes Resten, idet man fra $N - 100a^2$ subtraherer $20ab + b^2$ eller $(20a + b)b$. Dersom man derved faar en negativ Rest, viser dette, at den ovenfor bortkastede Brøk har været større end 1. Vi have derfor taget Værdien af b for høj og maa nu prøve med en Værdi for b, der er 1 lavere, og saaledes videre, til vi faa en positiv Rest.

For at vise, hvorledes Regningerne skrives, ville vi beregne $\sqrt{8927}$.

$$\begin{array}{rrcll} & 89|27 & = & 100a^2 + 20ab + b^2 + R & \quad a = 9 \\ & \underline{81} & = & \underline{100a^2 } & \\ 184) & 8\,27 & = & 20ab + b^2 + R & \\ & \underline{7\,36} & = & \underline{(20a + b)b} & \\ & 91 & = & R & \end{array}$$

Først finde vi $a = 9$. Efter $81 = 9^2$ er underforstaaet 2 Nuller. Foran 827 $(N - 100a^2)$ skrive vi $2 . a = 18$ og finde $b = 4$ ved at dividere 18 i 82 (180 i 827); det fundne Ciffer 4 føjes efter 18, og 184 $(20a + b)$ multipliceres med 4 (b); vi faa derved 736 $(20ab + b^2)$ og finde Resten 91 ved at subtrahere 736 fra 827. Man har saaledes $\sqrt{8927} = 94$, hvor Fejlen er mindre end 1, eller nøjagtigt $8927 = 94^2 + 91$.

16. **Flercifrede Tal.** Dersom Tallet har $2n - 1$ eller $2n$ Cifre, ligger det mellem 10^{2n-2} og 10^{2n}; dets Kvadratrod ligger da mellem 10^{n-1} og 10^n og skrives derfor med n Cifre. Inddele vi Tallet fra højre mod venstre i Klasser med to Cifre i hver Klasse (den første Klasse til venstre med et eller to Cifre), faar Kvadratroden derfor eet Ciffer for hver Klasse.

Kvadratroden kan ogsaa i dette Tilfælde skrives som $10a + b$, men a er da selv et flercifret Tal, der findes ved at man uddrager Kvadratroden af Tallet, efter at den sidste Klasse er bortskaaren. Kender man denne Kvadratrod, findes b og R som før; kender man den ikke, sættes $a = 10a_1 + b_1$, en Klasse bortskæres, og a_1 findes, idet man uddrager Kvadratroden af det Tal, der nu staar, o. s. v. Fortsætter man paa denne Maade, kommer man tilsidst til et a, der har eet Ciffer, og som findes, idet man tager Kvadratroden af den første Klasse; er

dette a fundet, findes det tilsvarende b som ovenfor vist, og man kender nu to Cifre, altsaa det næste a; derved findes det næste b, o. s. v. Hvergang man har subtraheret, trækkes den næste Klasse ned; ved Divisjon med det dobbelte af det fundne Tal findes nu et Ciffer til, o.s.v.

$$\text{Eks.}\quad \sqrt{71|23|71|56|12} = 84402$$

```
          64
   164)  723
         656
  1684)  6771
         6736
168802)  355612
         337604
          18008 = R.
```

Efter at have subtraheret $8^2 = 64$ og trukket den næste Klasse ned, skrive vi $2 . 8 = 16$ foran 723. Det næste Ciffer er da $71 : 16 = 4$, der skrives efter 16, samt i Resultatet. 164 multipliceres med 4 og giver 656; man subtraherer, trækker ned og skriver $2 . 84 = 168$ foran 6771. Det næste Ciffer er $67 : 16 = 4$, der skrives i Resultatet og efter 168, o. s. v.

Dersom et Ciffer bliver 0, skrives dette blot i Resultatet, og man trækker den næste Klasse ned.

17. **Restens Størrelse.** Dersom man har fundet $\sqrt{N} = a$ (Rest R), maa man have

$$N = a^2 + R; \quad N < (a + 1)^2.$$

Heraf følger $\qquad R < 2a + 1,$

der viser, at den størst mulige Rest er det dobbelte af det fundne Tal.

For at undersøge, om den søgte Rod ligger nærmest

ved a eller ved $a + 1$, prøver man, om $a + \frac{1}{2}$ er større eller mindre end Roden. Nu er

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4};\ N = a^2 + R.$$

$a + \frac{1}{2}$ er derfor større end Roden, dersom $R < a + \frac{1}{4}$, mindre end Roden, dersom $R > a + \frac{1}{4}$. Man forhøjer derfor det sidst fundne Ciffer med en Enhed, dersom Resten er større end den fundne Rod; man faar derved en Rod, der er for stor, men Fejlen er mindre end $\frac{1}{2}$.

Eks. $\sqrt{6115} = 78$ (R. 31); $\sqrt{611524} = 782$;
$\sqrt{956484} = 978$; $\sqrt{57198969} = 7563$;
$\sqrt{1607448649} = 40093$; $\sqrt{236144689} = 15367$;
$\sqrt[4]{429981696} = 144$; $\sqrt[8]{282429536481} = 27$.

18. **Kvadratroden med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$.** Dersom man vil uddrage Kvadratroden af et Tal N saa nøjagtigt, at Fejlen er mindre end en vis Brøk $\frac{1}{p}$ $\left(\text{med Fejlgrænsen}\ \frac{1}{p}\right)$, uddrager man Kvadratroden af Np^2 og dividerer derpaa Resultatet med p. Man har nemlig

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{Np^2}}{p};$$

uddrages $\sqrt{Np^2}$, finder man et helt Tal a, saa at

$$a + 1 > \sqrt{Np^2} > a,$$

$$\frac{a+1}{p} > \sqrt{N} > \frac{a}{p},$$

hvorved $\sqrt{N}$ er fundet saa nøjagtigt, at der ikke mangler $\frac{1}{p}$.

Skal man finde $\sqrt{N}$ med n Decimaler, sættes $p = 10^n$; man faar da

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.10^{2n}}}{10^n},$$

der viser, at man til Tallet skal føje 2 Nuller for hver

Decimal, man ønsker, og at de *n* Cifre, der findes ved Hjælp af de tilføjede Nuller, ere Decimaler.

Eks. $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots\ldots;$ $\sqrt{3} = 1{,}73205 \ldots;$

$\sqrt{11}$ (F. $\frac{1}{11}$) $= \frac{36}{11}$; $\sqrt{71}$ (F. $\frac{1}{19}$) $= \frac{160}{19}$.

19. **Kvadratrodsuddragning af Brøker.** Man uddrager Roden af Tæller for sig og Nævner for sig efter først at have skrevet Brøken saaledes, at Nævneren er et Kvadrattal. Man kan ogsaa forvandle Brøken til en Decimalbrøk; for at uddrage Kvadratroden af en saadan inddeler man i Klasser fra Kommaet til begge Sider, idet man tilføjer et Nul, dersom der er et ulige Antal Decimaler; man opnaar derved, at Brøkens Nævner bliver en Potens af 10 med lige Eksponent, og Kvadratroden heraf er atter en Potens af 10.

Er Brøken 0,0000 . . *ab* . ., bliver Resultatet 0,00 . . *c* . . med et Nul efter Kommaet for hver Klasse af to Nuller i Tallet; det første Ciffer *c* af Roden, der ikke er Nul, (det første betydende Ciffer) findes da som Kvadratroden af den første Klasse af Tallet, der ikke bestaar af to Nuller, og man regner videre som ved hele Tal. Man har nemlig f. Eks.

$$\sqrt{0{,}00|05|60} = \frac{\sqrt{5{,}60}}{10^2} = \frac{2{,}3\,..}{10^2} = 0{,}023\,..$$

Eks. $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0{,}774\,.. = \sqrt{0{,}6};$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1{,}732\,..}{3} = 0{,}577\,.. = \sqrt{0{,}333333\ldots};$$

$\sqrt{0{,}00789} = 0{,}0888\ldots;$ $\sqrt{10\frac{8}{10}} = 3{,}21;$ $\sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}645\,..$

20. **Kvadratrodsuddragning af Polynomier.** Dersom det ordnede Polynomium er N, maa det første Led af

Roden være Kvadratroden af det første Led af N; de følgende Led findes da som ved Tal, kun med den Forskel, som følger af, at Leddene her ikke betegne Enere, Tiere o. s. v.; man faar altsaa

$$N = a^2 + 2ab + b^2 + R,$$

hvor a er det første Led af Roden, medens det næste bestemmes som første Led i Kvotienten

$$\frac{N - a^2}{2a}.$$

Eks. $\sqrt{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{rl}
 & a^4 \\
\hline
2a^2 - 2ab) & -4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & -4a^3b + 4a^2b^2 \\
\hline
2a^2 - 4ab + b^2) & 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Det dobbelte af a^2 er $2a^2$, der, divideret i $-4a^3b$, giver det næste Led $-2ab$, der lægges til $2a^2$, hvorpaa $2a^2 - 2ab$ multipliceres med $-2ab$, o. s. v.

Eks. $\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1} = 2x^2 - 3x + 1$;

$\sqrt{9x^6 - 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = 3x^3 - x^2 - x - 1$.

Kubikrodsuddragning.

21. De første Kubiktal ere

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729;

man finder derved $\sqrt[3]{N}$ med Fejlgrænsen 1, dersom $N < 1000$. Har N flere Cifre, faar $\sqrt[3]{N}$ saa mange Cifre, som man faar Klasser ved at inddele Tallet i saadanne fra højre mod venstre, med tre i hver Klasse; et Tal med $3n-2$, $3n-1$ eller $3n$ Cifre ligger nemlig mellem

10^{3n-3} og 10^{3n}; dets Kubikrod maa da ligge mellem 10^{n-1} og 10^n og følgelig skrives med n Cifre.

Sætte vi $\sqrt[3]{N} = 10a + b$,

faa vi $N = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R$,

der viser, at a^3 indeholdes i Tallets Tusender, og at a derfor findes, naar man uddrager Kubikroden af N efter at have bortskaaret de tre sidste Cifre.

Er a fundet, faar man

$$\frac{N - 1000a^3}{300a^2} = b + \frac{30ab^2 + b^3 + R}{300a^2},$$

hvor den sidste Brøk oftest er mindre end 1; man finder derfor b ved at dividere $N - 1000a^3$ med $300a^2$, men kan derved faa en for stor Værdi; man søger nu Resten ved at subtrahere $300a^2b + 30ab^2 + b^3$; faas Resten derved negativ, maa man tage b en Enhed mindre og saaledes videre, til man faar en positiv Rest. Dersom a selv har flere Cifre, maa disse findes efterhaanden, idet man sætter $a = 10a_1 + b_1$ og saaledes videre, til man kommer til et a, der findes som Kubikroden af den første Klasse. I Eksemplet er skrevet a og b for a_1 og b_1, da dette ikke kan misforstaas.

Eks. $\sqrt[3]{834|516|419} = 941$

	$729 = 1000a^3$
	$105516 = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R$
$3a^2 = 243$	$972 = 300a^2b$
$b = \frac{1055}{243} = 4$	$432 = 30ab^2$
	$64 = b^3$
	101584
$a = 94$	$3932419 = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R$
$3a^2 = 26508$	$26508 = 300a^2b$
$b = 1$	$2821 = 30ab^2 + b^3$
	2653621
	$1278798 = R.$

Eksemplet viser, hvorledes Regningen opstilles i Praksis. Man kan imidlertid give den en Form, der letter Udførelsen, idet man benytter det ene $3a^2$ o. s. v. til Beregningen af det næste. Regningen i Eksemplet ovenfor bliver da saaledes:

274 } 243 834|516|419 (941
8 } 1096 } 729
2821 25396 } 105516
16 } 101584
26508 3932419
2821 2653621
2653621 1278798

I den første Kolonne skrives 27 ($3a$), i den anden 243 ($3a^2$); derpaa findes $b = 4$, som føjes efter 27, hvorpaa 8 ($2b$) adderes til det fundne Tal. 274 ($30a + b$) multipliceres med 4 (b), og det fundne Tal 1096 ($30ab + b^2$) adderes i den anden Kolonne til $300a^2$; man faar derved 25396 ($300a^2 + 30ab + b^2$), der multipliceres med 4 (b), hvorved man finder det Tal, som man skal subtrahere i den tredje Kolonne for at finde den første Rest. I den anden Kolonne skriver man nu 16 (b^2), og denne og de to forrige Rækker adderes; man faar derved 26508 ($300a^2 + 60ab + 3b^2$) eller $3 . 94^2 (3(10a + b)^2)$, som netop er det ny $3a^2$. Man finder nu det næste Ciffer 1, som føjes til det sidste Tal i første Kolonne o. s. v. Man ser, at man ved denne Ordning kun har Additioner og Multiplikationer med enkeltcifrede Tal at udføre. Vi ville anføre endnu et Eksempel:

152
4
1564
8
15724

75
304
7804
4
8112
6256
817456
16
823728
62896
82435696

144|235|168|531
125 (5244
19235
15608
3627168
3269824
357344531
329742784
27601747

22. For at uddrage Kubikroden med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$ sætter man

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{Np^3}}{p}.$$

For at uddrage Kubikroden af en Decimalbrøk deler man denne i Klasser med tre Cifre i hver, idet man gaar ud fra Kommaet; ere de første Cifre 0,00 . . ., faar man et Nul i Resultatet for hver Klasse af Nuller i Tallet. Almindelige Brøker forvandles til Decimalbrøker eller skaffes Nævnere, der ere Kubiktal. Rigtigheden af de angivne Metoder indses som ved Kvadratrod.

For at uddrage Kubikroden af et Polynomium ordnes dette, og man gaar frem som ved Tal med den Forskel, som medføres deraf, at de enkelte Led ikke her ere Tiere, Hundreder o. s. v.

Man faar altsaa her

$$N = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + R.$$

Eks.

$$\sqrt[3]{a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1} = a^2 - 2a + 1$$

$$a^6$$

$$-6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \qquad b = \frac{-6a^5}{3\,a^4}$$

$$-6a^5$$

$$+12a^4$$

$$-8a^3$$

$$3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \qquad b = \frac{3a^4}{3a^4}$$

$$3a^4 - 12a^3 + 12a^2$$

$$3a^2 - 6a$$

$$+1$$

$$0$$

Regning med tilnærmede Tal.

23. Vi have lært at bestemme en enkelt Kvadrat- eller Kubikrod med saa stor Nøjagtighed, som vi ønske; dersom man har et sammensat Udtryk, hvis enkelte Dele kun kunne beregnes med Tilnærmelse, maa man imidlertid undersøge, hvilken Nøjagtighed man skal benytte i Mellemregningerne for at faa en vis opgiven Nøjagtighed i det endelige Resultat. Man regner i saadanne Opgaver næsten altid med Decimalbrøker, og vi ville derfor her forudsætte, at Opgaven er at bestemme et Udtryks Værdi saaledes, at et vist givet Antal Decimaler ere paalidelige.

Hvert Led maa beregnes med det samme Antal Decimaler. Dersom et Led har flere paalidelige Decimaler end et andet, har man nemlig ingen Nytte deraf, da de tilsvarende Decimaler i Resultatet maa blive upaalidelige.

Man beregner derfor, hvis Leddenes Antal ikke overstiger 10, hvert Led med een Decimal flere, end man

ønsker i Resultatet; da Fejlen i hvert Led, udtrykt i den sidste søgte Decimals Enhed, er mindre end $\frac{1}{10}$, bliver Fejlen i den flerleddede Størrelse mindre end 1.

Dersom man skal beregne f. Eks. $5\sqrt{3}$ med Fejlgrænsen a, maa $\sqrt{3}$ beregnes med Fejlgrænsen $\frac{1}{5}a$, thi Fejlen bliver efter Roduddragningen multipliceret med 5. Skal man derimod beregne f. Eks. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ med Fejlgrænsen a, kan man nøjes med at beregne $\sqrt{3}$ med Fejlgrænsen $5a$.

Eks. $7\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{5} + \frac{1}{100}\sqrt{7} - 208\sqrt{11}$ skal beregnes med fire rigtige Decimaler; hvert Led beregnes da med 5 Decimaler. $\sqrt{3}$ uddrages med 6 Decimaler, da $\sqrt{3}$ skal multipliceres med 7; $\sqrt{5}$ uddrages med 4 Decimaler, da Divisjonen med 12 gør den 5[te] Decimal paalidelig; $\sqrt{7}$ uddrages med 3, $\sqrt{11}$ med 8 Decimaler. I det endelige Resultat beholdes da kun 4 Decimaler.

24. Dersom man skal finde de n første Cifre af Kvadrat- eller Kubikroden af et tilnærmet Tal, behøver man kun at finde de $n + 1$ første Cifre af dette og tilføje Nuller for de øvrige. Skal man f. Eks. finde de 4 første Cifre af $\sqrt{12 + \sqrt{3}}$, finder man $\sqrt{3} = 1{,}732$ og bestemmer derpaa $\sqrt{13{,}732000}$; den Fejl, der kommer i Resten, er højst 999, men da det fundne Tal (uden Hensyn til Kommaet) bliver større, kan denne Fejl ikke foraarsage en Fejl af $\frac{1}{2}$ i det sidst fundne Ciffer. En lignende Betragtning kan anvendes ved Kubikrod.

Skal man finde et vist Antal Cifre af en Kvadratrod, kan man finde de sidste ved en Divisjon. Lad nemlig $\sqrt{N}$ være søgt og a være det fundne Tal, lad $a + x$ være den nøjagtige Værdi; vi have da

$$N = a^2 + 2ax + x^2 \text{ og } N = a^2 + R,$$

altsaa $$2ax + x^2 = R;\; x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Dersom vi altsaa til det fundne Tal addere $\frac{R}{2a}$, ville vi faa et Resultat, der er $\frac{x^2}{2a}$ for stort; vi kunne tænke os, at N er et helt Tal og $a = \sqrt{N}$ med Fejlgrænsen 1. x er da mindre end 1 og $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2a}$; vi kunne derfor paa denne Maade, naar vi have fundet n Cifre, finde n eller i alt Fald $n-1$ Cifre til ved den angivne Divisjon. Ved Kubikroden kan man paa lignende Maade indse, at man, ved til a at addere $\frac{R}{3a^2}$, kan finde n eller, under ugunstige Omstændigheder, mindst $n - 2$ Cifre til.

Eks. $\sqrt{5643}$; $a = 75$; $R = 18$; $R:2a = 0{,}12$, altsaa $\sqrt{5643} = 75{,}12$; uddrages Roden paa almindelig Maade, faar man 75,1199.

Eksempler til Øvelse.

1. $\sqrt{11} - 3\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{19} - \sqrt{0{,}001}$ (3 Dec.)
2. $\sqrt{\frac{5}{8}} - \frac{1}{15}\sqrt{\frac{5}{6}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{5}}$ (3 Dec.)
3. $\sqrt[3]{0{,}05} - \frac{1}{8}\sqrt{7} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (3 Dec.)
4. $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (3 Dec.)
5. $\sqrt[3]{3 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}}$ (4 Dec.)

Reelle og imaginære Størrelser.

25. Vi have hidtil ved Roduddragning kun omtalt de numeriske Værdier; skal man uddrage en Rod af et Tal med Fortegn, bestemmes Resultatets numeriske Værdi paa den tidligere angivne Maade, medens dets Fortegn bestemmes efter følgende Regler:

Er Rodeksponenten et ulige Tal, faar Roden samme Fortegn som Potensen. Den sædvanlige Prøve viser, at Sætningen er rigtig.

Eks. $\sqrt[3]{-8} = -2$, thi $(-2)^3 = -8$;

$$\sqrt[2n-1]{-1} = -1;\quad \sqrt[5]{+32} = 2;$$

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-27})^2 = (-3)^2 = 9.$$

En lige Rod af et positivt Tal har to Værdier, idet Fortegnet baade kan være $+$ og $-$, thi baade et positivt og et negativt Tal give positive Resultater, naar de opløftes til lige Potenser.

Eks. $\sqrt{16} = \pm 4$; $\sqrt[2n]{1} = \pm 1$;

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm (a-b).$$

Man har vedtaget at benytte brudne Eksponenter, naar man taler om begge Rodens Værdier, medens man, naar man benytter Rodtegn, kun mener den ene Værdi; i de anførte Eksempler bør altsaa skrives

$16^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$; $(a^2 - 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}} = \pm (a-b)$ o. s. v.; derimod er

$$\sqrt{16} = 4;\quad -\sqrt{16} = -4;\quad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \begin{cases} a-b \\ b-a \end{cases},$$

hvor man læser $a-b$, naar $a > b$, men $b-a$, naar $b > a$.

Man maa derfor, naar man benytter Rodtegn og mener begge Værdier, sætte dobbelt Fortegn for Rodstørrelsen.

En lige Rod af et negativt Tal er hverken positiv eller negativ, da man ikke ved Potensopløftning kan faa negativt Resultat, naar Eksponenten er et lige Tal.

26. Man kan udvide Størrelsesbegrebet saaledes, at ogsaa en lige Rod af et negativt Tal faar Betydning. De ny Størrelser, der hverken ere positive eller negative, kaldes imaginære, i Modsætning til de positive og negative Størrelser, der kaldes reelle. $\sqrt{-4}$ har den numeriske Værdi 2, men Fortegnet for 2 kan hverken være + eller —; man skriver $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\ 2$, hvor $\sqrt{-1}$ da spiller et nyt Fortegns Rolle; det ny Fortegn betegnes ogsaa ved Bogstavet i, saa at man har $\sqrt{-4} = i2$ eller $(i2)^2 = -4$. To Størrelser med Fortegnet i have altsaa negativt Produkt.

Ordene «imaginær» og «reel» ere uheldige, idet de lede til at opfatte de ny Størrelser som ikke eksisterende i Modsætning til de reelle Størrelser. I Virkeligheden kan man imidlertid, som det senere vil blive vist, anvende Algebraen paa Opgaver, hvor de imaginære Løsninger have lige saa megen Betydning som de reelle. Sagen er altsaa den, at alle vore Størrelser ere uden Betydning, saa længe vi ikke selv tillægge dem en saadan, idet vi anvende Algebraen paa Opgaver, hentede fra Virkeligheden. Efter Opgavens Natur kunne da negative, brudne, ja selv positive, hele Løsninger vise, at Opgaven er umulig (Sønnen 32 Aar, Faderen 30 Aar). Forskellen er altsaa blot, at saa længe vi ikke have udvidet vore Begreber paa den antydede Maade, maa vi sige, at en Opgave, som kun har imaginære Løsninger, er umulig.

Da det let kan staa som noget ubegribeligt, at der kan tænkes andre Tal end positive og negative, ville vi

allerede her antyde den Udvidelse, der senere vil blive givet Størrelsesbegrebet. Vi have set, at man ved + eller — kan angive, om en Linie skal afsættes ud fra et Punkt i een Retning eller i den modsatte; Linien kan imidlertid afsættes ud fra Punktet i uendelig mange Retninger, og det kan da være naturligt at betegne ogsaa de andre Retninger ved Fortegn; nu vil det netop vise sig, at man ved en Linie ia maa forstaa en Linie a, afsat i en Retning, vinkelret paa den, der betegnes ved +, dersom man vil kunne regne med imaginære Størrelser efter de samme Regler som med reelle Størrelser.

27. Da de imaginære Størrelser paa vort nuværende Standpunkt ikke have nogen Betydning, kan der heller ikke være nogen Mening i at tale om deres Sum, Produkt o. s. v. Naar vi alligevel i det følgende paa enkelte Steder gøre dette, er det kun for vor Bekvemmeligheds Skyld. Summen af $a + \sqrt{b}$ og $a - \sqrt{b}$ er $2a$, naar b er et positivt Tal, men betyder Intet, naar b er et negativt Tal; for ikke at behøve at undersøge, om b er positiv eller negativ, sige vi derfor, at Summen altid er $2a$, men vi mene da ikke Andet med Ordet Sum end det Resultat, som vi komme til, naar vi regne med imaginære Tal efter de samme Regler, som vi benytte ved reelle Tal. Paa samme Maade sætte vi da

$$(a + \sqrt{-1}\, b)\ (a - \sqrt{-1}\, b) = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2;$$

$$(a + \sqrt{-1}\, b)\ (c - \sqrt{-1}\, d) = ac + bd + \sqrt{-1}\,(bc - ad);$$

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^2 = -1;\ (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = 1;\ (\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1} \text{ o.s.v.}$$

Ligninger af anden Grad.

28. Dersom en Ligning efter at være bragt paa rational, hel Form antager Formen

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

siges den at være af anden Grad eller at være en kvadratisk Ligning; ved Divisjon med A skaffe vi x^2 Koefficienten 1, hvorved Ligningens Form bliver

$$x^2 + ax + b = 0. \qquad (1)$$

Før vi løse denne Ligning, ville vi betragte to specielle Tilfælde.

1. $a = 0$; Ligningen $x^2 + b = 0$ kaldes ren kvadratisk. Man faar $x^2 = -b$; $x = \pm\sqrt{-b}$; Ligningen har altsaa 2 Rødder, der ere reelle, dersom b er negativ, imaginære, dersom b er positiv.

2. $b = 0$; Ligningen $x^2 + ax = 0$ skrives

$$x(x + a) = 0.$$

Denne Ligning er tilfredsstillet, dersom $x = 0$, og dersom $x + a = 0$; Ligningen har altsaa de to Rødder

$$x = 0;\; x = -a.$$

29. Vi ville nu løse den almindelige (blandede) kvadratiske Ligning

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Den skrives $\qquad x^2 + ax = -b,$

hvorpaa $\frac{a^2}{4}$ adderes paa begge Sider; man har da

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$$

eller $\qquad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b,$

hvoraf

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

altsaa $$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \qquad (2)$$

Ligningen har saaledes to Rødder, der ere reelle, dersom $\frac{a^2}{4} > b$, imaginære, dersom $\frac{a^2}{4} < b$. Dersom $\frac{a^2}{4} = b$, faar man blot

$$x = -\frac{a}{2};$$

man siger i dette Tilfælde, at Ligningen har to lige store Rødder eller blot lige Rødder.

(2) viser, at den ubekendte i en ordnet anden Grads Ligning, hvor x^2 har Koefficienten 1, findes, naar man tager det halve af Koefficienten til x med modsat Fortegn, plus eller minus Kvadratroden af den samme Størrelses Kvadrat, efterfulgt af sidste Led med modsat Fortegn.

Eks. $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$; $x^2 + 7 = 0$; $x = \pm\sqrt{-7} = \pm i\sqrt{7}$; $x^2 + 6x = 0$; $x = 0$, $x = -6$;
$$x^2 - 6x + 8 = 0; \quad x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases};$$
$$3x^2 + 5x - 8 = 0; \quad x^2 + \tfrac{5}{3}x - \tfrac{8}{3} = 0;$$
$$x = -\tfrac{5}{6} \pm \sqrt{\tfrac{25}{36} + \tfrac{8}{3}} = -\tfrac{5}{6} \pm \tfrac{11}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\tfrac{8}{3} \end{cases};$$
$$x^2 - ax + ab = bx; \quad x^2 - (a + b)\,x + ab = 0;$$
$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}};$$
$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} = \begin{cases} a \\ b \end{cases}.$$

30. **Røddernes Sum og Produkt.** Betegne vi de to Rødder ved α og β, have vi

$$\alpha = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$\beta = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

hvoraf

$$\alpha + \beta = -a; \quad \alpha\beta = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b. \qquad (3)$$

Summen af Rødderne er altsaa lig Koefficienten til x med modsat Fortegn, medens Produktet af Rødderne er lig Ligningens sidste Led.

Ved at benytte disse Sætninger kan man paa en let Maade prøve, om en kvadratisk Ligning er rigtig løst.

Eks. $x^2 + 6x + 8 = 0;$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases};$$

Prøve: $-4 - 2 = -6; \quad (-4)(-2) = 8.$

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2b^2 = 0;$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4} - a^2b^2}.$$

$$x = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4}} = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \frac{a^2 - b^2}{2} = \begin{cases} a^2 \\ b^2 \end{cases}.$$

$$x^2 - 4x + 7 = 0;$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm i\sqrt{3};$$

Prøve: $(2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4;$

$$(2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) = 7.^{*}$$

$$ax^2 + abx + x + b = 0; \quad ax^2 + (ab+1)x + b = 0;$$

$$x^2 + \frac{ab+1}{a}x + \frac{b}{a} = 0;$$

---

*) Dette Eksempel viser os, hvorledes vi ved at indføre imaginære Tal have opnaaet, at vi kunne udtale Sætningen ovenfor almindeligt; i modsat Fald maatte vi have sagt, at den kun gjaldt, hvis Størrelsen under Rodtegnet ikke var negativ

$$x = -\frac{ab+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(ab+1)^2}{4a^2} - \frac{b}{a}};$$

$$x = -\frac{ab+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2 - 2ab + 1}{4a^2}}$$

$$= -\frac{ab+1}{2a} \pm \frac{ab-1}{2a} = \begin{cases} -b \\ -\frac{1}{a}; \end{cases}$$

Prøve: $-b - \frac{1}{a} = -\frac{ab+1}{a}$; $(-b)\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{b}{a}$.

$$x^2 + ab(b^2 - a^2) = a^2x + b^2x;$$

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + ab(b^2 - a^2) = 0;$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2 - 4ab(b^2 - a^2)}{4}};$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4ab(b^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} = a^2 + 2ab - b^2;$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \frac{a^2 + 2ab - b^2}{2} = \begin{cases} a^2 + ab \\ b^2 - ab \end{cases}.$$

$$a^2 + ab + b^2 - ab = a^2 + b^2;$$

$$(a^2 + ab)(b^2 - ab) = ab(b^2 - a^2).$$

31. Ved Hjælp af Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt kan man danne en Ligning med givne Rødder. Skulle saaledes Rødderne være $\alpha = 5$, $\beta = 7$, har man $a = -(5 + 7) = -12$, $b = 5.7 = 35$, saa at Ligningen bliver

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Eks. $\alpha = 2 + \sqrt{3}$; $\beta = 2 - \sqrt{3}$; $a = -4$; $b = 1$.

$\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$; $a = -2p$; $b = p^2 + q^2$.

32. Dersom man har de to Ligninger

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b, \end{aligned} \qquad (4)$$

findes derfor de to ubekendte x og y som Rødder i den kvadratiske Ligning

$$z^2 - az + b = 0;$$

x bliver da, hvilken af de to Rødder man vil, medens y bliver den anden Rod. Er saaledes $x+y=11$, $xy=28$, findes x og y af Ligningen

$$z^2-11z+28=0,$$

hvoraf $$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=z=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-28}=\left\{\begin{matrix}7\\4\end{matrix}\right..$$

I de to Ligninger (4) kunne x og y ombyttes, uden at Ligningerne forandres; Ligninger med denne Egenskab kaldes symmetriske. To symmetriske Ligninger kunne altid omskrives, saa at de kun indeholde $x+y$ og xy; man sætter da $x+y=u$, $xy=v$ og søger først u og v; ere disse fundne, findes x og y.

Eks. 1. $x^2+y^2=26$; $x+y+xy=11$.

Man har $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$;

altsaa er $u^2-2v=26$; $u+v=11$,

hvoraf $$u^2+2u=48;$$

$$u=\left\{\begin{matrix}6\\-8\end{matrix}\right.;\quad v=\left\{\begin{matrix}5\\19\end{matrix}\right.,$$

altsaa

$$z^2-6z+5=0 \text{ og } z^2+8z+19=0;$$

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.;\quad \left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=-4\pm\sqrt{-3}.$$

Eks. 2. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Kvadraterne af Rødderne i Ligningen $x^2+ax+b=0$.

Kaldes Rødderne i den givne Ligning α og β, bliver den søgte Ligning

$$y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+\alpha^2\beta^2=0;$$

nu er $$\alpha+\beta=-a;\quad \alpha\beta=b,$$

altsaa $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2b$; $\alpha^2\beta^2=b^2$,

saa at den søgte Ligning bliver

$$y^2-(a^2-2b)y+b^2=0.$$

Man kunde ogsaa have sat

$$y = x^2,\ \text{altsaa}\ x = \sqrt{y},$$

der, indsat i den givne Ligning, giver

$$y + a\sqrt{y} + b = 0;$$

af denne Ligning bortskaffes $\sqrt{y}$, og man faar den samme Ligning som ovenfor.

Eks. 3. Find Siderne af et Rektangel, hvis halve Perimeter er s, og hvis Areal er A, og angiv, hvilket Rektangel med en given Omkreds, der er det største.

Kaldes de to Sider x og y, har man

$$x + y = s,\quad xy = A,$$

altsaa

$$z^2 - sz + A = 0;$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - A}.$$

Man ser heraf, at den største Værdi, som A kan have, naar s er given, er $\frac{s^2}{4}$, da Siderne for en større Værdi af A vilde blive imaginære. For denne Værdi af A bliver $x = y = \frac{s}{2}$; det største Rektangel med given Perimeter er altsaa et Kvadrat. Paa lignende Maade kan man ofte bestemme den største eller mindste Værdi, som en Størrelse kan faa. (Dens Maximum eller Minimum.)

33. **Opløsning i Faktorer.** Vi have tidligere bevist, at $x - a$ gaar op i et Polynomium, dersom det bliver Nul for $x = a$ (I. 55). Skal man opløse et Polynomium i Faktorer, maa man derfor søge de Værdier af et af de forekommende Bogstaver, der gøre Polynomiet til Nul.

Er Polynomiet af anden Grad med Hensyn til det Bogstav, vi betragte, findes de søgte Værdier ved at løse en kvadratisk Ligning. Skal man f. Eks. opløse

$$a^2 - 5a + 6$$

i Faktorer, faar man, idet x er den Værdi af a, som gør Polynomiet til Nul,

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases},$$

altsaa $$a^2 - 5a + 6 = (a - 2)(a - 3).$$

Dersom der findes flere Bogstaver i Polynomiet, ordner man efter det, med Hensyn til hvilket Polynomiet er af lavest Grad; skal man f. Eks. opløse

$$a^2 - (m + n) a + mn,$$

kan man vel søge de Værdier af a, der gøre Polynomiet til Nul, men søger man Værdierne af m eller n, faar man kun en Ligning af første Grad at løse. I Praksis sætter man ikke x for den Værdi, man søger, men beholder Betegnelsen; vi sætte altsaa

$$a^2 - (m + n) a + mn = 0,$$

hvoraf $$m(n - a) = na - a^2,$$

$$m = \frac{a(n - a)}{n - a} = a;$$

$m - a$ er altsaa den ene Faktor; man ser let, at den anden Faktor er den, som bortforkortes, altsaa her $n - a$; man har altsaa

$$a^2 - (m + n) a + mn = (m - a)(n - a).$$

Dersom man, før Ligningen løses, bortdividerer en Faktor, maa man føje denne til de fundne; er f. Eks. Polynomiet

$$3x^2 + 5x - 8,$$

sætter man

$$x^2 + \tfrac{5}{3} x - \tfrac{8}{3} = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -\frac{8}{3} \end{cases},$$

saa at

$$3x^2 + 5x - 8 = 3(x - 1)(x + \tfrac{8}{3}) = (x - 1)(3x + 8).$$

Ligesom man saaledes løser en Ligning for at opløse et Polynomium i Faktorer, kan man omvendt dele

en Ligning i flere simplere, dersom Udtrykket paa venstre Side af Lighedstegnet i den ordnede Ligning (med Nul paa højre Side af Lighedstegnet) kan opløses i Faktorer; kan en Ligning f. Eks. skrives

$$A \,.\, B \,.\, C \,.\,. = 0,$$

hvor A, B, C.. ere Polynomier, deler Ligningen sig i

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \ldots.$$

Man ser nemlig let, at en Rod i $A = 0$ eller $B = 0$... ogsaa er en Rod i $ABC.. = 0$, og omvendt, at Produktet ABC.. ikke kan blive Nul, uden at en af Faktorerne er Nul.

Eks. 1. $\qquad x^3 - 1 = 0$

deler sig i $\quad x - 1 = 0$ og $x^2 + x + 1 = 0$,

saa at $\qquad x = 1$ og $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Eks. 2. $\quad x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$

deler sig i $\quad x = 0; \quad x^2 - 4 = 0; \quad x^2 - 3x + 2 = 0$, saa at Rødderne ere 0, -2, $+2$, 1 og 2. 2 er altsaa lige Rod.

34. **Ligninger, der løses som kvadratiske Ligninger.** Ofte kan man i en Ligning betragte en Størrelse, der indeholder x, som den ubekendte; Ligningen løses da med Hensyn til denne Størrelse, og derefter findes x.

Eks. 1. $x^4 + ax^2 + b = 0$. Ligningen er kvadratisk, naar x^2 tages som den ubekendte; man faar

$$x^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}.$$

2. $\quad x - 5 + 2\sqrt{x - 5} = 24; \quad \sqrt{x - 5} = -1 \pm \sqrt{25};$

$$x = \begin{cases} 41 \\ 21 \end{cases}.$$

3. $$(x^2 + 3x + 1)^2 + 3x^2 + 9x = 37;$$

$$(x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) = 40;$$

$$x^2 + 3x + 1 = \begin{cases} 5 \\ -8 \end{cases}; \quad x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$$x^2 + 3x + 9 = 0, \text{ o. s. v.}$$

35. **Uendelig store Rødder.** Af Ligningen

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

finde vi $$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Vi kunne altsaa kun faa $x = \infty$ for $A = 0$. I dette Tilfælde vender man tilbage til den givne Ligning, der reduceres til første Grad, nemlig

$$Bx + C = 0; \quad x = -\frac{C}{B}.$$

Ved en første Grads Ligning maa man altsaa mærke sig, at dersom den skal betragtes som et specielt Tilfælde af en Ligning af anden Grad, er $x = \infty$ den manglende Rod. Det kan, navnlig ved geometriske Opgaver, være af Vigtighed, at man ikke glemmer denne Rod, der kan vise en lige saa gyldig Løsning af Opgaven som den endelige Rod.

Eks. $(a-b)x^2 - 2ax + a + b = 0$; spc. $b = a$.

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a-b)(a+b)}}{a-b} = \frac{a \pm b}{a-b} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{a+b}{a-b} \end{cases}.$$

For $b = a$ faas $x = \infty$ og $x = 1$; den givne Ligning reduceres for $b = a$ til

$$-2ax + 2a = 0, \text{ hvoraf } x = 1.$$

36. **Dobbelt irrationale Størrelser.** Man kalder en Størrelse dobbelt irrational, naar den har Rodtegn under Rodtegn. Særlig betragtes Udtryk af Formen

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Et saadant Udtryk kan undertiden gives enkelt irrational Form; for at opnaa dette sætte vi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, \tag{5}$$

altsaa
$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm \sqrt{4xy}.$$

Dersom $\sqrt{b}$ er irrational, medens a, b, x og y ere rationale, kan denne Ligning, som vi nedenfor ville bevise det, kun være rigtig, dersom de rationale og de irrationale Størrelser paa begge Sider af Lighedstegnet hver for sig ere ens; man har altsaa

$$x + y = a, \quad xy = \frac{b}{4},$$

hvoraf
$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm k}{2}, \text{ idet } k = \sqrt{a^2 - b}. \tag{6}$$

For at Opgaven skal kunne løses, maa k være rational, da i modsat Fald $\sqrt{x}$ og $\sqrt{y}$ selv blive dobbelt irrationale; er k rational, har man da

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + k)} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - k)}. \tag{7}$$

Vi forudsætte b positiv; skal Resultatet være reelt, maa man da nødvendigvis have $a^2 > b$, da ellers k bliver imaginær, og a positiv, da ellers $\sqrt{\tfrac{1}{2}(a - k)}$ bliver imaginær.

Eks. $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$ $(k = 1)$.

$$\sqrt{51 - 36\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{51 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{51 - 3}{2}} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}.$$

$$(k = \sqrt{51^2 - 36^2 . 2} = 3).$$

$$\sqrt[4]{97 - 56\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{97 - 56\sqrt{3}}} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$
$$= 2 - \sqrt{3}.$$

37. Vi benyttede ovenfor den Sætning, at man ikke kan have

$$a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y},$$

hvor a, b, x og y ere rationale, medens $\sqrt{b}$ og $\sqrt{y}$ ere irrationale, uden at have

$$a = x;\quad b = y.$$

Man faar nemlig af

$$\sqrt{b} = x - a + \sqrt{y}$$

$$b = (x-a)^2 + y + 2(x-a)\sqrt{y},$$

der vilde give en rational Værdi for $\sqrt{y}$, dersom man ikke havde $x = a$ og altsaa ogsaa $y = b$.

38. **Polynomiet af anden Grad.** Det er ofte af Vigtighed at afgøre, for hvilke reelle Værdier af x Polynomiet

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

er positivt, Nul eller negativt. For at afgøre dette, løser man Ligningen $y = 0$; lad denne have Rødderne α og β. Følgende Tilfælde kunne forekomme:

1) α og β ere imaginære. y kan da ikke blive Nul for nogen reel Værdi af x; da nu y, idet x forandrer sin Værdi, kun kan skifte Fortegn ved at passere Nul, maa Fortegnet for y være det samme for alle reelle Værdier af x; y har altsaa altid samme Fortegn som C, da y har dette Fortegn for $x = 0$.

2) α og β ere reelle; man har da

$$y = A(x-\alpha)(x-\beta).$$

Dersom A er positiv, bliver y positiv for Værdier af x, der er større end den største eller mindre end den mindste af Rødderne α og β, negativ for Værdier af x, der ligge mellem α og β. Dersom A er negativ, bliver derimod y positiv for Værdier af x, der ligge mellem α og β, Nul for $x = \alpha$ og $x = \beta$, negativ for andre Værdier.

3) $\alpha = \beta$. Man har da

$$y = A(x-\alpha)^2,$$

der viser, at y har samme Fortegn som A for alle Værdier af x, undtagen for $x = a$, der gør $y = 0$.

39. En Størrelse y siges at være en Funktion af en anden Størrelse x, naar der eksisterer en Ligning mellem y og x, saa at Værdien af y forandres, naar Værdien af x forandres. Man kan ved et Billede faa et godt Overblik over disse Værdiforandringer.

Paa en ret Linie tænker man sig ud fra et Punkt O (Nulpunktet) afsat lige store Stykker, der repræsentere Enheden, til begge Sider. Værdierne af x repræsenteres da ved Størrelsen af Afstandene fra O (positive eller negative). I hvert Punkt oprejses nu en vinkelret, og dennes Længde gøres lig den til Værdien af x svarende Værdi af y (opad, dersom y er positiv, nedad, dersom y er negativ). En krum Linie gennem Endepunkterne af de vinkelrette vil da vise, hvorledes, naar x vokser, y vokser eller aftager, bliver positiv, Nul eller negativ.

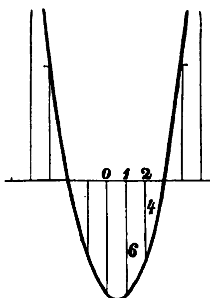
Er f. Eks. $y = x^2 - x - 6$,

vil hosstaaende Skema vise, hvilke Værdier y faar, naar x faar Værdierne $= -4, -3 \ldots 4, 5$:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y =$	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14

;

herved konstrueres da følgende Figur:



Gaa vi videre til begge Sider, stiger Kurven meget stærkt; vi se altsaa, at for $x = -\infty$ er $y = \infty$, at y derpaa aftager og bliver Nul for $x = -2$, at y derpaa bliver negativ og faar sin mindste Værdi, naar x er mellem 0 og 1, derpaa atter vokser, bliver Nul for $x = 3$, paa ny bliver positiv og vokser i det uendelige, naar x vokser i det uendelige.

Til Øvelse tegnes de krumme Linier, som repræsentere Ligningerne

$y = x^2 + x + 1$; $y = x^2 - 2x - 8$; $y = x^2 + 2x + 1$,

der netop ere Eksempler paa de tre ovenfor behandlede Tilfælde.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^2 + 11x + 28 = 0$; **2.** $x^2 - 6x = 7$;

3. $5x^2 - x - 4 = 0$;

4. $(x + 1)(2x - 3) = (3x - 1)(x - 2) + 3$;

5. $x(x - 3) = x(x - 5)$; **6.** $(x + 1)(x - 1) = a^2 + 2a$;

7. $x^2 + a = ax + x$; **8.** $bx^2 - abx + a = bx$;

9. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$;

10. $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 4) = 6(2x - 5)$;

11. $(2x + 3)^2 = 8x$; **12.** $x^2 - ab = ax - bx$;

13. $2x^2 + 7x + 3 = 0$; **14.** $13x^2 - 7x = 1$;

15. $x^2 - 4x + 5 = 0$; **16.** $x^4 + 8 = 9x^2$;

17. $x^2 + (a + 2b)(3a - 2b) = 4ax$; **18.** $x + 3\sqrt{x} = 18$;

19. $\frac{x^2 - 5x}{x + 3} = x - 3 + \frac{1}{x}$; **20.** $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{5}{6}$;

21. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x + 5} = \frac{23}{7}$; **22.** $x + 2\sqrt{x - 3} = 6$;

23. $\sqrt{x - 3} + 2\sqrt{x} = 5$; **24.** $3bx^2 - 3b^2x + b^2 = a$;

25. $2a^2x^2 = b(ax - 3b)$; **26.** $a(x^2 + 1) = (a^2 + 1)x$;

27. $3a^2 + 2a - 5$ opl. i Fakt.; ligeledes Eks. 28—32.

28. $a^2 - (m + 2n)a + 2mn$; **29.** $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$;

30. $3a^2 - 7ab - 6b^2$; **31.** $a^2 + 2bc - 2ab - c^2$;

32. $a^2 + ac - b^2 + 5bc - 6c^2$.

33. $x + y = 17$; $xy = 70$;

34. $x + y = a + 1$; $xy = a$;

35. $x^2 + y^2 = 13$, $xy = 6$;

36. $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$, $xy = a^2 - b^2$;

37. $x^3 + y^3 = 28$, $x + y = 4$;

38. $x^3 + y^3 = a^3 - 1$, $x + y = a - 1$;

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$; **40.** $\sqrt{19 - 6\sqrt{2}}$;

41. $x^2 - 3x + 2\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2$;

42. $(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x = 18$;

43. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)(x^2 - 3x)(x^2 + 7)x(x + 1) = 0$;

44. $x^4 - 1 = 0$; **45.** $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$;

46. $x^3 - 8 = 0$; **47.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

48. $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$; **49.** $\sqrt{1 + 4\sqrt{-3}}$;

50. $\sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2ab + 2\sqrt{2}(a^2 - b^2)}$;

51. $x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} = 80$;

52. $3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ ($x = 1$ er den ene Rod);

53. $x^4 + 4a^2b^2 = (a^2 + 4b^2)x^2$;

54. $x^2 - 2\frac{a + b}{a - b}x + 1 = 0$ (sp. $a = b$);

55. $abx^2 - 2x(a + b)\sqrt{ab} = (a - b)^2$;

56. $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{a^2}{x^2 - x}$; **57.** $7^x + 7^{-x} = \frac{50}{7}$;

58. $x^2 - 4ax + 3ab + b^2 = 0$; ere Rødderne reelle?

59. $\frac{1}{x+\sqrt{18-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{18-x^2}}=\frac{x}{16};$

60. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$

---

61. Hvilken Ligning har Rødderne $2\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$?

62. Tallet 2268 skal deles i to Faktorer, hvis Sum er 99.

63. Find to Tal, af hvilke det ene er 10 større end det andet, og hvis Kvadraters Sum er 148.

64. A køber for 4 Kr. Æbler; havde hvert Æble kostet en Øre mindre, havde han faaet 20 Æbler flere; hvormange fik han?

65. Et tocifret Tal har Tværsummen 10; multipliceres det med det omvendte Tal, faar man 2944. Find Tallet.

66. Fra Byerne A og B, der ligge 13 Mil fra hinanden, gaa to Mænd hinanden imøde og mødes efter $10\frac{1}{2}$ Times Forløb; den ene bruger et Kvarter mere til at gaa en Mil, end den anden; hvor lang Tid bruger hver?

67. Gennem et Rør kan et Kar fyldes 2 Timer hurtigere end gennem et andet Rør; ere de begge aabne, fyldes Karret i $1\frac{7}{8}$ Time; hvor lang Tid er hvert Rør om at fylde Karret?

68. Man lader en Sten falde ned i en Brønd og hører den falde efter 7 Sekunders Forløb; hvor dyb er Brønden? Stenen antages i t Sekunder at falde $16t^2$ Fod og Lyden at gennemløbe 1100 Fod i Sekundet.

Ligninger med flere ubekendte.

40. Ved flere Ligninger med flere ubekendte bør man kun bruge Substitutionsmetoden, dersom nogle af de ubekendte kunne udtrykkes rationalt ved de andre; er dette ikke muligt, forsøger man at regne saaledes med de givne Ligninger, at man faar simplere Ligninger, og disse sættes da for de mest sammensatte af de givne Ligninger. For at danne saadanne simplere Ligninger af to givne anvender man hyppig med Fordel følgende Metoder:

1. Den ene Ligning kan ofte divideres i den anden.

Eks. Af $x^3 + y^3 = 9, \quad x + y = 3$

dannes $x^2 - xy + y^2 = 3.$

2. Ved Addition eller Subtraktion bortskaffes de højeste Potenser af en eller flere ubekendte.

Eks. Af $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x - y &= 6 \\ x^2 + y^2 - x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$ faas $4x - 2y = 4.$

3. For at kunne anvende den forrige Regel opløfter man ofte den ene Ligning til en Potens.

Eks. $x^2 - xy + y^2 = 3$; $x + y = 3$. Af den sidste Ligning faar man $x^2 + 2xy + y^2 = 9$; subtraheres herfra den første, faar man $3xy = 6$ eller $xy = 2$, saa at man nu har

$$x + y = 3; \quad xy = 2.$$

4. Af de givne Ligninger dannes en ny, der kan reduceres ved Roduddragning.

Eks. Af $\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b \end{aligned}\right\}$ faas $\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= a^2 \\ 4xy &= 4b \end{aligned}$,

hvoraf ved Subtraktion

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b; \quad x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}.$$

5. Ny ubekendte indføres for sammensatte Udtryk.

Eks. $3(x^2+y^2)+5xy = 25.$

$$2(x^2+y^2)-3xy = 4.$$

Sætte vi $x^2+y^2 = u, \quad xy = v,$

faa vi $3u+5v = 25; \; 2u-3v = 4,$

hvoraf $u = 5$, $v = 2$; vi have nu

$$x^2+y^2 = 5, \; xy = 2, \text{ hvoraf } (x+y)^2 = 9;$$

$$(x-y)^2 = 1, \text{ o. s. v.}$$

41. Dersom begge Ligninger ere af anden Grad med Hensyn til x, og x skal elimineres, elimineres x^2, og man kan da søge x. Ligningerne kunne skrives

$$ax^2+bx+c = 0,$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1 = 0,$$

hvor Koefficienterne indeholde den anden ubekendte; man faar heraf, idet x^2 elimineres,

$$(ba_1-ab_1)x = c_1a-a_1c;$$

af denne Ligning kan nu x indsættes i en af de givne Ligninger; man vil imidlertid derved faa en Ligning i den anden ubekendte, der i Reglen ikke kan løses ved kvadratiske Ligninger.

42. Vi have tidligere lært, at Rodtegn kunne bortskaffes af en Ligning ved Potensopløftning. En Kvadratrod bortskaffes saaledes, idet man isolerer den og kvadrerer; man faar derved imidlertid den samme Ligning, hvad enten Kvadratroden har Fortegnet + eller —, saa at man i den ved Kvadrering erholdte Ligning har indbefattet en ny Ligning, foruden den givne; man faar derved Rødder, som ikke vedkomme Opgaven (fremmede Rødder), og som maa udskilles ved Prøve. Saaledes af

$$x+\sqrt{x-5} = 11 \text{ faar man } \sqrt{x-5} = 11-x;$$

$$x-5 = (11-x)^2; \; x^2-23x+126 = 0;$$

$$x = 9 \text{ og } x = 14.$$

Prøven giver nu $9 + \sqrt{4} = 11; \quad 14 - \sqrt{9} = 11,$ saa at den sidste Rod tilhører Ligningen

$$x - \sqrt{x - 5} = 11,$$

der ogsaa fører til samme Ligning af anden Grad. Man ser saaledes, at man efter at have bortskaffet Rodtegnene faar en Ligning, der i sig indeholder alle de Ligninger, som kunne dannes af den givne ved Forandring af Rodstørrelsernes Fortegn. Prøven maa da vise, hvilke Rødder der svare til de forskellige Kombinationer af Fortegn. Det kan endogsaa træffe sig, at der ingen Rod svarer til en eller flere af Kombinationerne. Saaledes faar man af

$$\sqrt{x + \tfrac{1}{2}} + \sqrt{x - \tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \text{ kun } x = \tfrac{17}{16},$$

der stemmer, naar man af den første Rod tager den positive, af den anden den negative Værdi, medens de tre andre Ligninger, der kunne dannes ved Forandring af Fortegnene, ingen Rødder have.

Af det udviklede følger, at det er naturligt at betragte ethvert Rodtegn (hvorunder den ubekendte findes) i en Ligning, som om det havde begge Fortegn, selv om man kun skriver eet; efter at Ligningen er løst, undersøger man derpaa, til hvilke Kombinationer de forskellige Rødder svare.

43. Ligninger som de her betragtede erstattes med Fordel ved flere Ligninger med flere ubekendte, idet man betragter de forekommende Rodstørrelser som ny ubekendte. Saaledes sætte vi i Ligningen ovenfor

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \tfrac{1}{2}} &= y \\ \sqrt{x - \tfrac{1}{2}} &= z \end{aligned} \quad \text{altsaa} \quad \begin{aligned} x + \tfrac{1}{2} &= y^2 \\ x - \tfrac{1}{2} &= z^2 \\ y + z &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} 1 &= y^2 - z^2 \\ \tfrac{1}{2} &= y + z \end{aligned},$$

hvoraf $y + z = \frac{1}{2}$; $y - z = 2$; $y = \frac{5}{4}$; $z = -\frac{3}{4}$. $x = \frac{17}{16}$.

Man opnaar herved for det første, at Løsningen i Reglen bliver lettere, for det andet, at man, da man søger selve Rodstørrelserne, uden Prøve faar at vide, om man skal benytte deres positive eller deres negative Værdier. Saaledes vise her Værdierne af y og z, at den første Rodstørrelse i Ligningen maa være positiv, den anden negativ.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^4 + y^4 = 17;\ x^2 + y^2 = 5.$
2. $x^5 + y^5 = 33;\ x + y = 3.$
3. $x^2 + 2y^2 - x - y = 7;\ x^2 + 2y^2 + x - 2y = 12.$
4. $x + y + 3xy = 23;\quad x^2 + y^2 + xy = 19.$
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 14;\quad x + y + z = 6;\quad xy = 6z^2.$
6. $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x-8} = 1.$
7. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = c.$
8. $xy = a;\quad xz = b;\quad yz = c.$
9. $x^3 = ayz;\quad y^3 = bxz;\quad z^3 = cxy.$
10. $x + y = 2z;\quad x^2 + y^2 = 5z;\quad x^3 + y^3 = 7z^2.$
11. $y^2 = xz;\quad x + y + z = 21;$
    $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 378.$
12. $x^2 - (y-z)^2 = -3;\quad y^2 - (x-z)^2 = -5;$
    $z^2 - (x-y)^2 = 15.$
13. $x + y = 7;\ z + v = 3;\ x + z^2 = 8;\ y + v^2 = 4.$
14. $x(y+z) = a;\quad y(x+z) = b;\quad z(x+y) = c.$
15. $\frac{y+z}{a} = \frac{x+z}{b} = \frac{x+y}{c};$
    $(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = 1.$
16. $x + y = 5z;\quad x - y = 2z;\quad x^3 + y^3 = 185z.$
17. $\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{x-1} = 9.$

18. $\sqrt{x+a} + 2\sqrt{x+b} = c.$

19. $x + y = z$; $(x^2 + y^2)z = 15$; $x^3 + y^3 = 9.$

20. $(1 - xy)(z + 1) = 2$; $(x - y)(z + 1) = 4$;
$(x^2 - y^2)(z + 1)^2 = 16z.$

Rækker.

44. **Differensrækker.** (Aritmetiske Progressioner). En Differensrække er en Række Tal, af hvilke ethvert findes ved at addere den samme Størrelse (Differensen) til det foregaaende.

Kaldes Rækkens første Led a, Differensen d, bliver Rækken

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d \ldots$$

Betegner a_n Rækkens n^{te} Led, er $a_n = a + (n - 1)d$. Summen s af de n Led findes, idet man har

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + a_n$$

og $$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + a,$$

hvor den nederste Række er den samme som den øverste, men Leddene ere tagne i den omvendte Orden. Addition af de to Rækker giver

$$2s = n(a + a_n), \quad \text{altsaa } s = \frac{n(a + a_n)}{2}.$$

Mellem de 5 Størrelser a, a_n, n, d og s har man saaledes de to Ligninger

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a + (n - 1)d \\ s &= \frac{n}{2}(a + a_n) \end{aligned}\right\}; \qquad (1)$$

og følgelig kunne to af Størrelserne findes, naar de tre ere givne. I nogle af Tilfældene maa man for at finde de ubekendte løse en Ligning af anden Grad.

Eks. 1. Mellem to givne Tal a og b skal indskydes p Tal, saa at de $p + 2$ Tal danne en Differensrække; *sp.* $a = 1$, $b = 77$, $p = 18$.

Man har $$b = a + (p + 1)\,d,$$

altsaa $$d = \frac{b - a}{p + 1}.$$

For de givne Tal faar man $d = 4$, saa at Rækken er
$$1,\ 5,\ 9 \ldots . 77.$$
Disse Tal have Summen $10(77 + 1) = 780$.

Eks. 2. Givet $a = 1$, $d = 4$, $s = 780$.

Af den anden Ligning faas
$$a_n = \frac{2s}{n} - a,$$
hvorved den første bliver
$$\frac{2s}{n} - a = a + (n - 1)\,d$$
eller $$dn^2 - n\,(d - 2a) - 2s = 0,$$
altsaa $$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(d - 2a)^2 + 8sd}}{2d};$$
sp. $n = 20$, $a_n = 77$. Den anden Løsning er meningsløs.

45. **Kvotientrækker.** (Geometriske Progressioner). En Kvotientrække er en Række Tal, af hvilke ethvert findes ved at multiplicere det foregaaende med den samme Størrelse (Kvotienten).

Kalde vi Kvotienten q, medens vi forøvrigt bruge de samme Betegnelser som ovenfor, er Rækken
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots ,$$
hvoraf $$a_n = aq^{n-1}. \qquad (2)$$

Endvidere er
$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$
altsaa $$sq = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n,$$
hvoraf $$s(1 - q) = a - aq^n = a(1 - q^n),$$

altsaa $$s = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{q^n-1}{q-1}, \qquad (3)$$

hvor de to Udtryk for s bruges, efter som $q < 1$ (aftagende Kvotientrækker) eller $q > 1$ (voksende Kvotientrækker). En tredje Form for Summen faar man, idet

$$s = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a - a_n q}{1-q}. \qquad (4)$$

Af Ligningerne (2) og (3) eller (4) kunne to af de fem Størrelser findes, naar de tre ere givne; dog kommer man derved i flere Tilfælde til Ligninger, hvis Behandling vi endnu ikke have lært. Søger man q af (4), faar man en Ligning, der er værd at lægge Mærke til, nemlig

$$q = \frac{s-a}{s-a_n}.$$

Rækken kan have uendelig mange Led og dog en endelig Sum, dersom $q < 1$. I dette Tilfælde er nemlig $q^n = q^\infty = 0$, altsaa

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Efter hvad vi have sagt om Begrebet «Uendelig» er Meningen her, at vi kunne tage saa mange Led med af Rækken, at det, der mangler i den angivne Sum, er mindre end enhver, selv nok saa lille, given Størrelse.

Eks. 1. Mellem a og b skal indskydes p Tal, saa at de $p+2$ Tal danne en Kvotientrække; *sp.* $a = 1$, $b = 256$, $p = 7$.

Man har

$$b = aq^{p+1}, \text{ altsaa } q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}.$$

$$sp.\ q = \sqrt[8]{256} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ saa at Rækken er}$$

$$1,\ 2,\ 4 \ldots 256;$$

disse Tal have Summen $\frac{2^9-1}{2-1} = 511$.

Eks. 2. Produktet af Leddene i Rækken

$$a, \quad aq, \quad aq^2 \ldots aq^{n-1}$$

er $P = a^n q^{1+2\ldots+(n-1)} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(aq^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = t^n$,
hvor t, dersom n er ulige, er Rækkens mellemste Led.

Eks. 3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2;$

$$0{,}111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots = \frac{1}{9}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. Find Summen af alle ulige Tal fra 1 til 100.

2. I en Differensrække er $n = 22$, $d = 4$, $s = 99$. Find første og sidste Led.

3. Det 7de Led af en Differensrække er 10, det 17de er 50; find a_1 og d.

4. De 37 første Led af en Differensrække have Summen 888; Forskellen mellem det 31te og det 13de Led er 126; find a_1 og d.

5. I en Differensrække er Summen af Kvadraterne af det 4de og 12te Led 1170, Summen af det 7de og 15de Led 60; find a_1 og d.

6. Find Summen $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$

7. $a = 4$; $q = 6$; $a_n = 186624$; find s.

8. $a^{10} - a^9b + a^8b^2 - \ldots - ab^9 + b^{10}$.

9. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots (x < 1)$.

10. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots (x < 1)$.
Man gaar frem, som vi gjorde, da vi fandt s.

11. I en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er a, og hvis ene Vinkel er 30°, fældes Højden; fra dennes Fodpunkt fældes en vinkelret paa den største

Katete, fra dennes Fodpunkt en vinkelret paa a og saaledes videre i det uendelige; find Summen af de vinkelrette.

Logaritmer.

46. Af Ligningen

$$a^x = b \qquad (1)$$

bestemmes b ved Potensopløftning, naar x og a ere givne, a ved Roduddragning, naar x og b ere givne. Man kan imidlertid ogsaa søge x, naar a og b ere givne; x kaldes da Logaritmen til b med Grundtal (Basis) a og skrives

$$x = \log_a b,$$

en Ligning, der saaledes under en anden Form udtrykker det samme som (1).

Logaritmen til et Tal er altsaa Eksponenten til den Potens af Grundtallet, der er lig Tallet. Grundtallet 10 underforstaas i Betegnelsen, saa at man blot skriver log b. Vi benytte forøvrigt kun Grundtal større end 1.

Eks. $\log_a 1 = 0$, thi $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, thi $a^1 = a$; $\log_a 0 = -\infty$, thi $a^{-\infty} = 0$; $\log_a \infty = \infty$, thi $a^\infty = \infty$. $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 10^n = n$; $\log 0{,}1 = -1$; $\log 0{,}01 = -2$; $\log 0{,}0001 = -4$; $\log 0{,}000001 = -6$; $\log_3 \sqrt{27} = 1{,}5$; $\log_5 \sqrt[4]{125} = 0{,}75$.

47. Man har ved Metoder, som vi ikke her kunne udvikle, med Tilnærmelse beregnet Logaritmerne til alle hele Tal indtil en vis Grænse og opført disse i de saakaldte Logaritmetabeller eller Logaritmetavler. Logaritmernes Opfinder, Neper, benyttede et irrationalt

Grundtal mellem 2 og 3, da Logaritmerne lettest beregnes for dette Grundtal; hans Medarbejder Briggs indførte derimod 10 som Grundtal, og dette benyttes nu, da derved Logaritmernes Anvendelse lettes. Man benytter navnlig Tavler, der gaa til 10000 og give Logaritmerne med 5 Decimaler (Lalande, Hoüel, Dahlerup, Larsen), og større Tavler, med 7 Decimaler (Vega, Schrön).

48. Karakteristiken er det hele Tal i Logaritmen, medens Decimalerne kaldes Mantissen. Man bruger altid positiv Mantisse; er Logaritmen negativ, omskrives den derfor, idet man adderer og subtraherer et saadant helt Tal, at Mantissen bliver positiv. Er f. Eks. Logaritmen til et Tal — 1,23456, sætter man

$$-1{,}23456 = 2 - 1{,}23456 - 2 = 0{,}76544 - 2;$$

man faar derved positiv Mantisse, medens Karakteristiken (— 2) er negativ og skrives efter Mantissen.

49. Karakteristiken er $n-1$, dersom Tallets (numerus) Hele har n Cifre; den er $-n$, dersom Tallet har n Nuller foran det første betydende Ciffer.

Et n-cifret Tal ligger nemlig mellem 10^{n-1} og 10^n; dets Logaritme ligger da mellem $n-1$ og n og har følgelig Karakteristiken $n-1$. Begynder Tallet med n Nuller (0,000...), ligger det mellem $10^{-(n-1)}$ og 10^{-n}; dets Logaritme ligger derfor mellem $-(n-1)$ og $-n$ og, da Mantissen er positiv, bliver Karakteristiken $-n$.

Eks. $\log 137 = 2,\ldots$; $\log 17693 = 4,\ldots$;

$\log 0{,}7 = 0,\ldots - 1$; $\log 43928160 = 7,\ldots$;

$\log 0{,}000321 = 0,\ldots - 4$.

50. Mantissen afhænger ikke af Kommaets Plads i Tallet. Lad nemlig et Tal b have Logaritmen x; man har da, idet n er et vilkaarligt helt Tal,

$$10^x = b, \quad \text{hvoraf} \quad 10^{n+x} = 10^n \cdot b,$$

der viser, at $\log (10^n \cdot b) = n + x$. Logaritmen bliver altsaa n større, naar Tallet multipliceres med 10^n; da n er et helt Tal, kan Mantissen ikke derved forandres.

51. I Tavlerne findes Tallene og de tilhørende Logaritmer opførte i to Kolonner ved Siden af hinanden. I Tavlerne med 5 Decimaler kan man derved finde Logaritmen til ethvert Tal med indtil 4 Cifre. Vi kunne nu ogsaa finde Logaritmen til enhver Decimalbrøk med indtil 4 betydende Cifre. Først bestemmes Karakteristiken efter Reglerne ovenfor; Kommaet tænkes derpaa rykket hen efter det fjerde betydende Ciffer, hvilket, som vi have vist, ingen Indflydelse har paa Mantissen. Da Tallet nu er helt, kan Mantissen findes i Tabellen.

Eks. log 17,32 = 1,... I Tavlen findes til 1732 Mantissen 23855 (læs 238—55), altsaa er log 17,32 = 1,23855, log 173,2 = 2,23855, log 0,1732 = 0,23855 — 1,
log 0,001732 = 0,23855 — 3; log 130000 = 5,11394,
log 0,0943 = 0,97451 — 2, log 2608000 = 6,41631,
log 0,0002589 = 0,41313 — 4.

52. Søges det til en given Logaritme svarende Tal, findes de fire første Cifre af dette, idet man i Tabellen søger den Mantisse, der er nærmest (lavere) den givne. Kommaets Plads bestemmes derpaa ved den givne Karakteristik. Vi betegne det til Logaritmen x svarende Tal med nl. x.

Eks. nl. 2,41647 = 260,9. I Tavlen findes ved Mantissen 41647 Tallet 2609; da Karakteristiken er 2, sættes Kommaet efter det tredje Ciffer.

nl. 5,67852 = 177000; nl. 0,58320 — 3 = 0,003830.
nl. 0,30125 — 1 = 0,2001; nl. 0,31576 = 2,069.
nl. 0,53769 — 4 = 0,0003449; nl. 3,54518 = 3509.

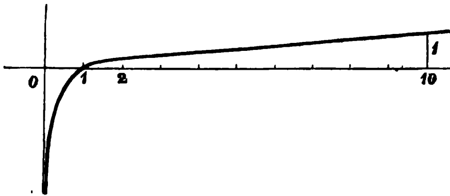
53. **Interpolation.** Man kan let tegne den krumme Linie, der paa den tidligere angivne Maade repræsenterer Ligningen $y = \log x$. Et negativt Tal har ingen reel Logaritme; de ægte Brøker have negative Logaritmer; man har

$$\log 0 = -\infty, \ldots; \quad \log 0{,}001 = -3;$$
$$\log 0{,}01 = -2; \quad \log 0{,}1 = -1;$$

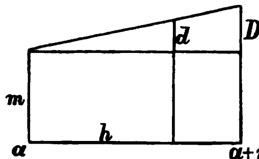
endvidere er

$$\log 1 = 0; \quad \log 10 = 1; \quad \log 100 = 2\ldots$$

Man ser derved, at Kurven har den i Figuren viste Form.



Figuren viser, at Kurven for nogenlunde store Tal paa et lille Stykke uden mærkelig Fejl kan betragtes som en ret Linie; idet man gaar ud herfra, kan man mellem to paa hinanden følgende Logaritmer til fircifrede Tal i de smaa Tavler indskyde (interpolere) de manglende Logaritmer og Tal. Lad Figuren forestille et Stykke af Kurven, hvor $m = \log a$; $m + d = \log (a + h)$ og $m + D = \log (a + 1)$, idet h er en ægte Brøk; man har da



$$d : D = h : 1$$

eller
$$d = hD; \; h = \frac{d}{D}. \tag{2}$$

m findes i Tabellen; D er Forskellen mellem log $(a + 1)$ og log a; denne Forskel findes i en særlig Kolonne i Tabellen; man kan altsaa beregne d, naar h er bekendt, og omvendt. D og d tages som hele Tal, men ere i Virkeligheden Hundredetusendedele.

Skulle vi f. Eks. finde log 3509,16, findes i Tavlen log 3509 $=$ 3,54518; $D = 13$; endvidere er $h = 0,16$, altsaa $d = 13 . 0,16 = 2$, idet man her tager det nærmeste hele Tal; man skal altsaa lægge 2 til den femte Decimal af Logaritmen, naar man lægger 0,16 til Tallet; følgelig er log 3509,16 $=$ 3,54520.

Søger man nl. 3,67574, findes i Tavlen

$$\text{nl. } 3,67569 = 4739; \quad D = 9;$$

altsaa er $d = 74 - 69 = 5$; $h = 5:9 = 0,56$;

$$\text{nl. } 3,67574 = 4739,56.$$

Flere end to Cifre af h ere ikke paalidelige, og hvor D er lille, bør man kun tage eet.

54. Vi kunne nu opstille følgende Regler:

At søge Logaritmen til et givet Tal. Bestem Karakteristiken, flyt derpaa Kommaet hen efter det fjerde betydende Ciffer og søg Mantissen til det fircifrede Tal; multiplicer Decimalbrøken med D og læg det ved det fundne nærmeste hele Tal til den fundne Mantisse.

At søge Tallet til en given Logaritme. Den nærmest lavere Mantisse opsøges i Tavlen, og det dertil svarende fircifrede Tal opskrives; Forskellen d mellem den givne Logaritme og den fundne divideres med D; de to første Decimaler af Kvotienten føjes efter de fundne fire Cifre; endelig bestemmes Kommaets Plads ved Hjælp af den givne Karakteristik.

Eks. $\log 4740{,}54 = 3{,}67583$; $\text{nl.}\, 2{,}67583 = 474{,}056$;
$\log 0{,}47443 = 0{,}67617 - 1$; $\text{nl.}\, 0{,}67617 = 4{,}74430$;
$\log 835516 = 5{,}92196$; $\text{nl.}\, (0{,}92196 - 1) = 0{,}83552$;
$\log 1{,}00004 = 0{,}00002$; $\text{nl.}\, 3{,}00007 = 1000{,}16$;
$\log 0{,}0111111 = 0{,}04575 - 2$;
$\text{nl.}\, (-1{,}23456) = 0{,}058269$.

55. I de fleste Tavler er i særlige Rubriker, hvorover Differensen D staar, beregnet de til hinanden svarende Værdier af d og h. Søger man f. Eks. i Schröns Tavle log 24503,618, finder man $\log 24503 = 4{,}3892193$; $D = 177$; $h = 0{,}618$. I Rukriken med Overskrift 177 finde vi nu de til 6, 1 og 8 svarende Differenser; disse adderes til den fundne Logaritme, idet man for hver følgende rykker Differensen en Plads til højre, da Cifrene af h faa en ti Gange lavere Værdi for hvert Ciffer, vi rykke frem; vi faa altsaa

log 24503	=	4,3892193
$h = 0{,}6$ d	=	1062
$h = 0{,}01$ d	=	177
$h = 0{,}008$ d	=	1416
log 24503,618	=	4,3892302.

Man slutter let heraf, hvorledes man gaar frem, naar Tallet søges.

56. **Sammensatte Udtryks Logaritmer.** Man kan ikke finde Logaritmen til en flerleddet Størrelse af de enkelte Leds Logaritmer; man søger derfor i Praksis at omskrive flerleddede Størrelser til Produkter; er dette ikke muligt, naar man beregne hvert Led for sig og udføre Additionerne og Subtraktionerne paa sædvanlig Maade.

57. Logaritmen til et Produkt er Summen af Faktorernes Logaritmer.

Af $x = 10^{\log x}$; $y = 10^{\log y}$

faas $xy = 10^{\log x + \log y}$,

altsaa $\log(xy) = \log x + \log y$.

58. **Logaritmen til en Brøk er Tællerens Logaritme minus Nævnerens Logaritme.**

Af $x = 10^{\log x}$; $y = 10^{\log y}$

faas $$\frac{x}{y} = 10^{\log x - \log y},$$

altsaa $$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y.$$

59. **Logaritmen til en Potens er Eksponenten Gange Rodens Logaritme.**

Af $x = 10^{\log x}$ følger $x^m = 10^{m \log x}$,

altsaa $\log x^m = m \log x$.

Da m er vilkaarlig, kunne vi for m sætte $\frac{1}{m}$; man faar da

$$\log x^{\frac{1}{m}} = \log \sqrt[m]{x} = \frac{\log x}{m},$$

der viser, at

60. **Logaritmen til en Rod er Potensens Logaritme, divideret med Rodeksponenten.**

Vi have ved disse fire Sætninger benyttet Grundtallet 10, men vi kunde lige saa godt have benyttet et vilkaarligt Grundtal.

Eks. $\log(ab : c^3) = \log a + \log b - 3\log c$.

$$\log\left(\sqrt[n]{a}\,.\,b^m : c\right) = \frac{1}{n}\log a + m\log b - \log c.$$

$$\log\frac{\sqrt{5}\,.\,0{,}01}{\sqrt[3]{7}\,.\,15} = \tfrac{1}{2}\log 5 + \log 0{,}01 - \tfrac{1}{3}\log 7 - \log 15$$

$$= \tfrac{1}{2}\,.\,0{,}69897 - 2 - \tfrac{1}{3}\,.\,0{,}84510 - 1{,}17609$$

$$= 0{,}34949 - 3{,}45779 = 0{,}89170 - 4.$$

61. **Følgende Regler anvendes i Praksis:**

1) **Dersom en større Logaritme skal subtraheres fra en mindre, adderes et saadant helt Tal til denne, at Subtraktionen kan udføres; det hele Tal maa da tilføjes som Subtrahend.**

Eks. $\log \frac{5}{7} = 0{,}69897 - 0{,}84510$
$= (1{,}69897 - 1) - 0{,}84510 = 0{,}85387 - 1.$

$$\log \frac{0{,}3}{6} = 0{,}47712 - 1 - 0{,}77815$$
$$= (1{,}47712 - 2) - 0{,}77815 = 0{,}69897 - 2.$$

2) **Dersom en negativ Logaritme skal divideres med et Tal, adderes et saadant Tal til begge den negative Logaritmes Led, at Divisjonen i det sidste Led gaar op.**

Eks. $\log \sqrt[3]{0{,}5} = \frac{1}{3}(0{,}69897 - 1) = \frac{1}{3}(2{,}69897 - 3)$
$= 0{,}89966 - 1.$

$$\log \sqrt[7]{0{,}04} = \frac{1}{7}(5{,}60206 - 7) = 0{,}80029 - 1.$$

3) Da man ved Logaritmer kun kan beregne numeriske Værdier, maa **en Størrelse, i hvilken der findes negative Tal, ændres saaledes, at der kun forekommer positive Tal.**

Eks. $x = \sqrt[3]{-3} \cdot (-0{,}4) = \sqrt[3]{3} \cdot 0{,}4;$
$$\log x = \frac{1}{3}\log 3 + \log 0{,}4.$$
$$x = \sqrt[5]{-5} \cdot (-11) : (-\sqrt{7}); \quad -x = \sqrt[5]{5} \cdot 11 : \sqrt{7};$$
$$\log(-x) = \frac{1}{5}\log 5 + \log 11 - \frac{1}{2}\log 7 = 0{,}75863;$$
$$-x = \text{nl.}\, 0{,}75863 = 5{,}7363; \quad x = -5{,}7363.$$

62. Vi kunne nu ved Logaritmer beregne en Størrelse, idet vi først søge Størrelsens Logaritme og derpaa søge det tilsvarende Tal. Har Størrelsen flere Led, maa disse, hvis Størrelsen ikke kan gøres logarit-

misk, beregnes hvert for sig. Undertiden kan det Udtryk, som man faar ved at tage Logaritmen, være saa sammensat, at man atter tager Logaritmen.

Eks. 1. $x = \frac{\sqrt{0,12567} \,.\, 0,5^3}{\sqrt[3]{12,419}}$.

$\log x = 0,54962 - 1 + 0,09691 - 1 - 0,36469.$

$\log x = 0,28184 - 2; \quad x = 0,019136.$

Eks. 2.

$x = \sqrt{3}^{\sqrt{3}}; \quad \log x = \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, 0,47712.$

$\log \log x = 0,23856 - 0,30103 + 0,67863 - 1.$

$\log \log x = 0,61616 - 1; \quad \log x = 0,41320;$

$x = 2,5894.$

Eks. 3. $x = \sqrt{a}^{\sqrt[a]{a}}$, hvor $a = 0,8152$.

$\log x = \frac{\log a}{\sqrt[a]{a}} = \frac{0,91126 - 1}{\sqrt[a]{a}} = \frac{-0,08874}{\sqrt[a]{a}}$

$\log (-\log x) = 0,94812 - 2 - \frac{0,91126 - 1}{0,8152}.$

$b = -\frac{0,91126 - 1}{0,8152} = \frac{0,08874}{0,8152}.$

$\log b = 0,94812 - 2 - 0,91126 + 1; \quad b = 0,10886.$

$\log (-\log x) = 0,94812 - 2 + 0,10886 = 0,05698 - 1.$

$-\log x = 0,11402; \quad \log x = 0,88598 - 1; \quad x = 0,7691.$

Eksempler til Øvelse.

1. $\sqrt[6]{235,78} = 2,48553.$ 2. $\left(\frac{9}{8}\right)^{21} = 11,86.$

3. $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0,959323.$ 4. $\sqrt[4]{0,00035246} = 0,137018.$

5. $0,53182 \,.\, 0,0614 : 5,1324.$ 6. $\sqrt{0,56} \,.\, 25,7132.$

7. $\sqrt[3]{\frac{1}{19}} : 5,1624.$ 8. $1501,62 \,.\, 1,035^7.$

9. $\frac{20,7583 \, . \, 3,97258}{27,50083} = 2,998601.$

10. $0,27583 \, . \, 0,00768 \, . \, 7080,3 \, . \, 0,8279 = 12,41745.$

11. $0,023697 \, . \, 0,0039741 \, . \, 1,00053 = 0,00009422417.$

12. $52,8173 : 0,17483 = 302,1066.$

13. $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,1615.$ **14.** $\sqrt[10000]{2} = 1,000069.$

15. $\sqrt[5]{0,2} = 0,72478.$ **16.** $713,005 \sqrt[4]{0,031421}.$

17. $\sqrt{0,4} + 0,51723^3.$ **18.** $0,61325^2 - 0,51423^2.$

19. Find $\sqrt{9a^2 - 4b^2}$, naar $a = 17,316$ og $b = 5,9123.$

20. $\frac{1}{1,035^{10}}.$ **21.** $\frac{1759}{0,035}\left(1 - \frac{1}{1,035^{10}}\right).$

22. $\log x = 3 \log a + \frac{1}{5} \log b - \frac{1}{2} (2 \log c - \log d)$; find x.

23. $\log x = 2 \log a - \frac{2}{3} \log b + 1$; find x.

24. $\sqrt{\frac{0,5936 \, . \, 1,42^2}{1,3200 \, . \, 7,1^3}} \cdot \sqrt[5]{-0,3}.$ **25.** $\sqrt{5}^{\sqrt{5}}.$

26. $\sqrt[3]{-1,7325} \, . \, \sqrt[5]{-0,3}.$ **27.** $\sqrt[7]{\log 0,5}.$

28. Find $a^2 - 3a + 2$, naar $a = 6,00007.$

29. $\sqrt[7]{1 - \sqrt[3]{0,51632}}.$ **30.** $\sqrt[3]{\sqrt{3,1} + 1,6396^2}.$

31. Bevis, at $x^{\log y} = y^{\log x}.$

32. Find $\log_5 713$, $\log_2 1024$ og $\log_3 1,73205.$

33. Tallene R, S og T ere a_r, a_s og a_t baade i en Differens- og i en Kvotientrække; find en Ligning mellem R, S og T.

Eksponentielle Ligninger.

63. En Ligning kaldes algebraisk, naar den ubekendte kun forekommer som Addend, Subtrahend, Faktor, Divisor, opløftet til Potens eller under Rodtegn (med rationale Eksponenter). Finder man derimod i

Ligningen Udtryk som log x, $a^x \ldots$, kaldes Ligningen transcendent. Af transcendente Ligninger ville vi her kun omtale de eksponentielle Ligninger, hvor den ubekendte forekommer som Eksponent.

Den simpleste eksponentielle Ligning har Formen

$$a^x = b;$$

man løser den ved at tage Logaritmen paa begge Sider af Lighedstegnet, hvorved man faar

$$x \log a = \log b; \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Man ser, at en Logaritmetabel ikke er andet end en Tabel, der indeholder Løsningerne af Ligningerne

$$10^x = 1, \quad 10^x = 2, \quad 10^x = 3 \ldots.$$

Sammensatte eksponentielle Ligninger kunne kun løses i enkelte Tilfælde:

1. Dersom der kun er eet Led paa hver Side af Lighedstegnet, reduceres Ligningen til en algebraisk Ligning, naar man tager Logaritmen.

Eks. $$3^x \cdot 4^{1-x} = 5^{2-x}.$$

$$x \log 3 + (1 - x) \log 4 = (2 - x) \log 5.$$

$$x (\log 3 - \log 4 + \log 5) = 2 \log 5 - \log 4, \quad \text{o. s. v.}$$

2. Dersom Ligningen ikke kan skrives med eet Led paa hver Side af Lighedstegnet, søger man at reducere Ligningen til en algebraisk Ligning ved at indføre en ny Ubekendt for et eksponentielt Udtryk.

Eks. 1. $$5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x} = \frac{403}{9}.$$

Sæt $3^x = y$, altsaa $3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \frac{1}{y}$.

$$5y - \frac{2}{y} = \frac{403}{9}; \quad 5y^2 - \frac{403}{9} y - 2 = 0; \quad y = \begin{cases} 9 \\ -\frac{2}{45} \end{cases}.$$

Nu har man

$$3^x = y = 9 \text{ og } 3^x = -\tfrac{2}{45}.$$

Af den første af disse Ligninger faas $x = 2$; den anden giver ingen reel Værdi af x.

Eks. 2. $2 \cdot 5^{1-x} + 3 \cdot 5^{x-2} = \frac{13}{4}$.

$$5^x = y;\ 5^{1-x} = \frac{5}{5^x} = \frac{5}{y};\ 5^{x-2} = \frac{5^x}{5^2} = \frac{y}{25},\ \text{o. s. v.}$$

De forekommende Tal bør opløses i Primfaktorer, da man derved, uden at bruge Logaritmetavlerne, vil finde de rationale Løsninger, hvis der gives saadanne.

Eks. 3. $\sqrt{5^{x^2-8}} \cdot \sqrt{3^{x+1}} = 1125$.

Eks. 4. $(5x)^{\log x} = 50$.

Eks. 5. $2 \cdot 3^{8-x} + 5 \cdot 3^{x-1} = \frac{137}{3}$.

Eks. 6. Hvorledes findes $\log_a m$?

Rentesregning.

64. Den Afgift, som svares af en laant Kapital, kaldes **Rente**; i Reglen angives Renten af hvert Hundrede (pro Cent) for den valgte Tidsenhed (Termin); her foretrække vi at gaa ud fra **Rentefoden**, det vil sige **Forholdet mellem Renten og Kapitalen** eller **Renten af Kapitalen 1**.

65. Betegne vi Kapitalen ved A, dens Rente i een Termin ved R, Rentefoden ved r, have vi altsaa

$$r = \frac{R}{A};\quad R = Ar. \tag{1}$$

Eks. Til en Rente af 5 pCt. (5%) svarer $r = 5 : 100 = 0{,}05$, til $3\frac{1}{4}$ pCt. svarer $r = 3\frac{1}{4} : 100 = 0{,}0325$, til $4\frac{1}{3}$ pCt. $r = 0{,}0433\ldots$ o. s. v.

Naar Rentefoden er 0,04, er Renten af 200 Kr. $0{,}04 \cdot 200$ Kr. $= 8$ Kr.; er $r = 0{,}0425$, bliver Renten af 850 Kr. $0{,}0425 \cdot 850$ Kr. $= 36$ Kr. 12,5 Ø. o. s. v.

66. **Simpel Rentesregning.** Er Kapitalen a, Rentefoden r, bliver Renten i een Termin ar, i n Terminer nar; Kapitalen a er altsaa efter n Terminers Forløb vokset til

$$b = a + nar = a(1 + nr). \qquad (2)$$

Ved Hjælp af denne Ligning kan en af de fire Størrelser a, b, n og r findes, naar de tre andre ere bekendte. Man maa erindre, at det her forudsættes, at den vundne Rente ikke selv forrentes.

Eks. En Mand har købt 4 pCts. Obligationer for 90 og sælger dem to Aar efter for 92; hvor mange pCt. p. a. (pro anno, aarlig) har han tjent? (simpel Rente).

Da han i de to Aar har havt 8 i Rente, har han givet 90 og faaet 100; altsaa er $b = 100$, $a = 90$, $n = 2$, hvoraf $100 = 90(1 + 2r)$; $r = \frac{1}{18} = 0{,}055\ldots$; han har altsaa faaet $100 . 0{,}055\ldots = 5\frac{5}{9}$ pCt. p. a. af sine Penge.

67. **Sammensat Rentes Regning.** Vi forudsætte her, at Renten ved hver Termins Slutning lægges til Kapitalen og forrentes med denne. Kalde vi den oprindelige Kapital a, Rentefoden r, Kapitalens Størrelse efter n Terminers Forløb a_n, finde vi

$$a_1 = a + ar = a(1 + r),$$

der viser os, at en Kapital ved at staa een Termin multipliceres med $(1 + r)$; nu staar Kapitalen a_1 atter een Termin og vokser derved til $a_2 = a(1 + r)^2$ o. s. v., saa at man faar

$$a_n = a(1 + r)^n, \qquad (3)$$

hvoraf

$$a = \frac{a_n}{(1 + r)^n} = a_n (1 + r)^{-n}. \qquad (4)$$

Vi se heraf, at en Kapital forandrer sig med Tiden, saaledes, at man ikke alene maa angive en Kapitals Størrelse, men tillige det Tidspunkt, da den har denne Størrelse; de to Formler (3) og (4) vise os, at:

Man kan flytte en Kapital frem i Tiden, naar man, for hver Termin den føres frem, multiplicerer med $(1 + r)$, og man kan føre den tilbage i Tiden, naar man for hver Termin dividerer den med $(1 + r)$.

Eks. En Kapital er a Kr. 1860; hvor stor er den 1870, og hvor stor var den 1850, naar Rentefoden er r? 1870 er den $a(1 + r)^{10}$, og 1850 var den $a : (1 + r)^{10}$.

68. Den fundne Ligning

$$a_n = a(1 + r)^n$$

tjener til Bestemmelse af en af de fire Størrelser, naar de tre andre ere givne. I Reglen benyttes Logaritmer til Beregningen, og er n den ubekendte, kan Ligningen kun løses ved Hjælp af Logaritmer; man har

$$\left.\begin{array}{ll} a_n = a(1 + r)^n; & \log a_n = \log a + n \log (1 + r). \\ a = a_n : (1 + r)^n; & \log a = \log a_n - n \log (1 + r). \\ 1 + r = \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a}}; & \log (1 + r) = \dfrac{1}{n}(\log a_n - \log a). \\ & n = \dfrac{\log a_n - \log a}{\log (1 + r)}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Eks. 1. 500 Kr. vokse i 7 Aar til 600 Kr. Find Rentefoden.

$$\log (1 + r) = \tfrac{1}{7} (\log 600 - \log 500) = 0{,}01131;$$
$$1 + r = 1{,}0264; \quad r = 0{,}0264.$$

Eks. 2. Hvorlænge skal en Kapital staa paa Rente til 4 pCt. for at fordobles?

$$2a = a \,.\, 1{,}04^n; \quad \log 2 = n \log 1{,}04;$$
$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}01703} = 17{,}7.$$

Man ser, at a gaar bort af Ligningen; derved vises, at Resultatet ikke afhænger af Kapitalens Størrelse.

Eks. 3. En Kapital staar 4 Aar til 4 pCt., derpaa 5 Aar til 5 pCt., derpaa 6 Aar til 6 pCt. Til hvormange pCt. maatte den staa alle de 15 Aar for at give samme Resultat?

$$a \,.\, 1{,}04^4 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 1{,}06^6 = a(1+r)^{15}.$$

$$\log(1+r) = \tfrac{1}{15}(0{,}06812 + 0{,}10595 + 0{,}15186).$$

$$\log(1+r) = 0{,}02173; \quad 1+r = 1{,}0513,$$

altsaa 5,13 pCt.

69. Dersom man i en Opgave har at gøre med flere Kapitaler, maa disse for at kunne adderes eller subtraheres henføres til samme Tid, i Reglen bedst til den Tid, da den ubekendte Kapital tænkes udbetalt.

Eks. 1. A har en Fordring a, der forfalder 1879, en Fordring b, der forfalder 1900, og en Fordring c, der forfalder 1890; B har en Fordring d, der forfalder 1882, og en Fordring e, der forfalder 1897; hvormeget skal B give A i Bytte 1892? (Rentefod r).

A's Fordringer ere 1892 henholdsvis

$$a(1+r)^{13}, \quad b:(1+r)^8, \quad c(1+r)^2.$$

B's Fordringer ere samme Aar

$$d(1+r)^{10}, \quad e:(1+r)^5.$$

Den Sum, B skal give A i Bytte 1892, er altsaa

$$a(1+r)^{13} + b:(1+r)^8 + c(1+r)^2 - d(1+r)^{10} - e:(1+r)^5.$$

Eks. 2. A satte 500 Kr. ud 1860 og 300 Kr. 1870; 1880 havde han i Alt 2600 Kr.; hvor stor var Rentefoden?

$$500(1+r)^{20} + 300(1+r)^{10} = 2600.$$

Denne Ligning er af anden Grad med Hensyn til $(1+r)^{10}$; man faar

$$(1+r)^{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+520}}{10} = \frac{-3+23}{10} = 2,$$

$$r = 0{,}0718,$$

idet den anden Løsning maa forkastes.

70. **Brudne Terminer.** Ligning (4) viser, at (3) ogsaa gælder for et negativt Antal Terminer, naar man ved at føre en Kapital $-n$ Terminer frem i Tiden forstaar, at den skal føres n Terminer tilbage. Formlen gælder ogsaa for n brudden, naar vi, ved at dele en Termin i flere mindre, bestemme den til den lille Termin svarende Rentefod saaledes, at hverken Kreditor eller Debitor har Fordel af Delingen. Dele vi en Termin (Rentefod r) i q mindre (Rentefod r_1), skulle vi altsaa have

$$a(1 + r_1)^q = a(1 + r),$$

da denne Ligning udtrykker, at Kapitalen a vokser lige meget, hvad enten den staar ude i den ene hele Termin eller i de q lige store Terminer, i hvilke denne er delt; man faar altsaa

$$1 + r_1 = \sqrt[q]{1 + r}. \tag{6}$$

Eks. Hvormange pCt. halvaarlig svare til 4 pCt. helaarlig?

$$1 + r_1 = \sqrt{1,04} = 1,0198, \text{ altsaa } 1,98 \text{ pCt.}$$

Staar nu en Kapital i n hele og p af de smaa Terminer, vokser den til

$$a(1 + r)^n(1 + r_1)^p = a(1 + r)^n (1 + r)^{\frac{p}{q}} = a(1 + r)^{n + \frac{p}{q}},$$

der viser, at (3) ogsaa gælder, naar Terminernes Antal er bruddent.

71. **Annuiteter.** En Annuitet er en Række lige store Summer, der betales een hver Termin; Annuitetens Kapitalværdi til et vist Tidspunkt er den Kapital, som til dette Tidspunkt har samme Værdi som alle de enkelte Udbetalinger have tilsammen. Man finder derfor Kapitalværdien ved at føre alle de enkelte Udbetalinger hen til det angivne Tidspunkt og addere dem.

Lad Rentefoden være r, Terminernes Antal n, medens de lige store Summer ere a, og A er Annuitetens Kapitalværdi samtidig med, at a betales sidste Gang. Den sidste Udbetaling har da paa dette Tidspunkt Værdien a, medens den forrige har Værdien $a(1+r)$, den forrige Værdien $a(1+r)^2$ o. s. v. Den første Udbetaling har da, da den skal føres $n - 1$ Terminer frem, Værdien $a(1+r)^{n-1}$; man har altsaa

$$A = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots a(1+r)^{n-1}.$$

Paa højre Side have vi en Kvotientrække med n Led og Kvotienten $(1+r)$; altsaa er

$$A = \frac{a}{r}((1+r)^n - 1). \tag{7}$$

Denne Formel benyttes f. Eks., dersom man søger, hvor stor en Kapital man har samlet, naar man hver Termin i længere Tid har sat den samme Sum paa Rente. Dersom man derimod afbetaler en Gæld G med n aarlige lige store Afdrag (Rentefod r), saaledes, at det første Afdrag betales en Termin efter, at Gælden er stiftet, bliver G Kapitalværdien en Termin før den første Udbetaling. Denne findes, naar man fører den ovenfor fundne Kapitalværdi n Terminer tilbage i Tiden ved Division med $(1+r)^n$; man faar altsaa

$$G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right). \tag{8}$$

72. Af denne Ligning kan man finde G, a eller n, dersom i hvert af Tilfældene de tre manglende Størrelser ere bekendte; r kan derimod i Reglen kun findes ved Forsøg, da Ligningen med Hensyn til r er af Graden $n+1$.

Naar G beregnes, søger man først $\frac{1}{(1+r)^n}$ ved Hjælp af Logaritmer; kaldes denne Størrelse q, har man

$$\log q = -n \log (1+r); \quad q = 0, \ldots$$

og derpaa
$$G = \frac{a}{r}(1-q). \tag{9}$$

Dersom a og r ere smaa Tal, udføres den sidste Regning uden Logaritmer.

Søges a, faar man

$$a = \frac{rG}{1-q}. \tag{10}$$

Søges n, faar man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{rG}{a} = 1 - \frac{1}{(1+r)^n}; \quad \frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{rG}{a} = \frac{a-rG}{a}; \\ &(1+r)^n = \frac{a}{a-rG}; \quad n = \frac{\log a - \log (a-rG)}{\log (1+r)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

73. Dersom $a = rG$, er $\log (a-rG) = \log 0 = -\infty$; man betaler i dette Tilfælde kun Renten af Gælden og faar derfor aldrig Gælden afbetalt; dersom $a < rG$, betaler man ikke engang Renten af Gælden; $a - rG$ bliver negativ og har ingen reel Logaritme. For $a > rG$ er derimod Opgaven altid mulig.

74. Dersom man søger n, finder man i Reglen ikke et helt Tal, men man faar $n = p + \beta$, hvor p er et helt Tal og $\beta < 1$. Naar man har betalt p Afdrag, er Gælden ikke betalt, men betaler man a engang til, har man betalt for meget; man kan derfor gøre sin sidste Udbetaling noget større, saa at hele Gælden er betalt efter p Terminer; er Forøgelsen x, altsaa ført tilbage $\frac{x}{(1+r)^p}$, har man derfor

$$G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{p+\beta}}\right) \text{ og } G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^p}\right) + \frac{x}{(1+r)^p},$$

hvoraf
$$x = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^\beta}\right).$$

I Praksis kan man sætte

$$x = \beta a,$$

idet man derved betaler lidt for meget, medens man ved at betale Restbeløbet βa en Termin senere vilde betale for lidt. Det vilde imidlertid føre os for vidt at vise dette her.

Eks. 1. En Gæld A til 4 pCt. afbetales, idet man i 10 Aar betaler 100 Kr. aarlig; hvor stor er Gælden?

$$A = \frac{100}{0,04}\left(1 - \frac{1}{1,04^{10}}\right).$$

$$\log q = -10 . 0,01703 = 0,82970 - 1;\; q = 0,6756.$$

$$A = 100 . 0,3244 : 0,04 = 811.$$

Der er ikke interpoleret ved Bestemmelsen af q, da den sidste Decimal af Logaritmen er upaalidelig.

Eks. 2. En Gæld paa 1622 Kr. til 4 pCt skal være afbetalt i 10 Aar; hvor stort er det aarlige Afdrag?

$$a = \frac{1622 . 0,04}{1 - q} = \frac{1622 . 0,04}{0,3244} = 200.$$

Eks. 3. En Gæld paa 2000 Kr. til 5 pCt. forrentes og afdrages med 150 Kr. aarlig; efter hvor lang Tids Forløb er den betalt?

$$n = \frac{\log 150 - \log(150 - 100)}{\log 1,05} = \frac{0,47712}{0,02119} = 22,516.$$

$$x = \frac{150}{0,05}\left(1 - \frac{1}{1,05^{0,516}}\right) = \frac{150}{0,05} . 0,0249 = 74,7.$$

Af $x = \beta a$ faar man $x = 77,4$.

Eks. 4. En Gæld A betales i 10 Aar, idet den aarlige Udbetaling er det dobbelte af Renten af den oprindelige Gæld; find r.

$$A = \frac{2Ar}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{10}}\right); \quad (1+r)^{10} = 2; \quad r = 0{,}0718.$$

Eks. 5. En Gæld A (Rentefod r) kan afbetales i n Aar ved et vist Afdrag; hvorlænge varer det, naar Afdraget fordobles?

$$A = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = \frac{2a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^x}\right);$$

$$(1+r)^x = \frac{2\,(1+r)^n}{(1+r)^n + 1};$$

$$x = \frac{\log 2 + n \log (1+r) - \log ((1+r)^n + 1)}{\log (1+r)}.$$

Eksempler til Øvelse.

(Rente af Rente.)

1. 713 Kr. 25 Øre staa i 15 Aar til $3\frac{1}{2}$ pCt. aarlig; hvormeget har man da?
2. Til hvilken Rentefod skal en Kapital staa for i 20 Aar at blive 3 Gange saa stor, som den oprindelig var?
3. Hvormange Aar skal 7291 Kr. 75 Øre staa for at vokse til 20000 Kr., naar den aarlige Rente er 24 Øre af 5 Kr.?
4. Paa en Kapital a tabes aarlig $100r$ pCt.; hvor stor er den efter n Aars Forløb?
5. Paa en Kapital a vindes n Aar og tabes derpaa n Aar aarlig $100r$ pCt.; hvor stor er den efter de $2n$ Aars Forløb; hvor stor er den, dersom der først tabes og derpaa vindes?
6. Til hvilken Sum vil 1 Øre til 5 pCt. vokse i 1892 Aar?

7. Kjøbenhavn havde 100000 Indbyggere Aar 1800, 210000 Indbyggere Aar 1876; hvormange Indbyggere vil den have Aar 2000, dersom Folkemængden aarlig vokser lige mange pCt.?

8. *A* skal betale 713 Kr. 1890, 1911 Kr. 1886 og 1000 Kr. 1878; han ønsker at betale hele sin Gæld 1884; hvormeget skal han da betale, naar Renten er $4\frac{1}{2}$ pCt.?

9. 300 Kr. staa et vist Antal Aar og 500 Kr. dobbelt saa mange Aar til 5 pCt. De to Summer ere tilsammen voksede til 1500 Kr. Hvormange Aar?

10. Hvilken maanedlig Rente svarer til 6 pCt. p. a.?

11. En Øre af 100 Kr. i Rente daglig, hvormange pCt. p. a. er det?

12. *A* har nu en Gæld, som han skal betale om 15 Aar; den Sum, han da skal betale, adderet til den Sum, han skulde have betalt, hvis han havde afgjort Gælden for 15 Aar siden, udgør Gælden, multipliceret med 2,5. Find Rentefoden.

13. *A* sætter aarlig 700 Kr. i Sparekassen; hvormeget har han efter 20 Aars Forløb, naar Renten er 3,8 pCt. p. a.?

14. Hvorlænge varer det, før en Gæld er afbetalt, naar Renten er 4 pCt. og der aarlig betales 6 pCt. af den oprindelige Gæld?

15. *A* handler med en Kapital paa 20000 Kr. og tjener aarlig 20 pCt.; til at leve for bruger han aarlig 2000 Kr., der lægges tilside ved Aarets Begyndelse; hvormeget ejer han efter 25 Aars Forløb?

16. Paa en Gæld af 775 Kr. til 4 pCt. afbetales aarlig 31 Kr. Hvorlænge varer det, før Gælden er betalt?

17. To Kar rumme hvert 100 Potter; det ene er fyldt med Vin, det andet med Vand; samtidig tages der en Pot op af hvert Kar og hældes over i det andet Kar; hvad er der i Karrene, naar denne Operation er gentagen 20 Gange?

18. Hvormeget skal man indskyde i en Sparekasse aarlig i 10 Aar for i de følgende 10 Aar at kunne hæve 800 Kr. aarlig? Renten er $3\frac{1}{2}$ pCt. p. a.

III. Tillæg.

Permutationer og Kombinationer.

1. **Permutationer.** Dersom en Gruppe af Genstande f. Eks. Bogstaver (Elementer) stilles efter hinanden i en bestemt Orden, danne de en Række. Ved Antallet af Permutationer af n Elementer forstaa vi Antallet af forskellige Rækker, der kunne dannes af disse Elementer. Vi ville betegne dette Antal ved P_n. Man har da f. Eks. $P_3 = 6$, idet tre Elementer kunne opstilles paa 6 Maader (abc, acb, bca, bac, cab, cba).

2. n Elementer kunne permuteres paa $1 . 2 . 3 \ldots n$ Maader.

Lad a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ være de n Elementer. Af Rækkerne ville vi betragte dem, der begynde med a_1; af disse er der saa mange, som der er Maader, paa hvilke man kan stille de øvrige $n - 1$ efter a_1; dette Antal er P_{n-1}; da der er lige saa mange af de P_n Rækker, der begynde med a_2, med a_3 o. s. v., har man altsaa

$$P_n = nP_{n-1},$$

hvoraf

$$P_{n-1} = (n-1) P_{n-2},$$
$$P_{n-2} = (n-2) P_{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_2 = 2 P_1,$$
$$P_1 = 1,$$

hvoraf ved Multiplikation

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \, . \, 1.$$

Dette Tal betegnes for Kortheds Skyld ved $[n]$ eller $n!$

3. Dersom α af Elementerne ere ens, blive de Rækker ens, der kun ere forskellige derved, at de ens Elementer ere omsatte indbyrdes. Der falder saaledes $[\alpha]$ og $[\alpha]$ Rækker sammen til een, og det hele Antal Permutationer er derfor $[n]:[\alpha]$; ere β andre Elementer ens, maa Antallet yderligere divideres med $[\beta]$, o. s. v.

Eks. En By har Form af et Rektangel; den har $m+1$ parallele Gader paa den ene Led og $n+1$ paa den anden; paa hvormange forskellige Maader kan man, uden at forlænge sin Vej, gaa fra det ene Hjørne af Byen til det modsatte?

Lad os sætte et a, hvergang vi gaa et enkelt Stykke i den ene Retning, et b, naar vi gaa i den derpaa vinkelrette Retning; en Række som

$$aababbbaaba\ldots,$$

hvor a forekommer m, b n Gange, vil da repræsentere een Vej; der er altsaa saa mange forskellige Veje, som der kan dannes Rækker af $m+n$ Elementer, af hvilke henholdsvis m og n ere ens; det søgte Antal er derfor $[m+n]:[m]:[n]$.

4. Ved $P_{n,m}$ (Permutationer af n Elementer til m) forstaa vi det Antal Rækker med m i hver, som kunne dannes af de n Elementer ($m < n$). Af Rækker, der begynde med a_1, er der saa mange, som der er Maader at udtage de manglende $m-1$ mellem $a_2, a_3 \ldots a_n$; da dette Antal er $P_{n-1,m-1}$ og Antallet af Rækker, som begynde med $a_2, a_3 \ldots$ maa være det samme som Antallet af dem, der begynde med a_1, faar man

$$P_{n,m} = n\, P_{n-1,\, m-1}$$

og
$$P_{n-1,m-1} = (n-1)\, P_{n-2,\, m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n-m+2,\, 2} = (n-m+2)\, P_{n-m+1,\, 1},$$
$$P_{n-m+1,1} = n-m+1,$$

hvoraf
$$P_{n,m} = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{[n]}{[n-m]}.$$

Eks. Find Summen af alle de Tal, der skrives med 5 forskellige Cifre, og i hvilke 0 ikke forekommer.

Ethvert Ciffer staar paa samme Plads i $P_{8,4}$ af Tallene og lige saa hyppig paa de andre Pladser; Summen er derfor $(1+2+\ldots+9)(1+10+10^2+10^3+10^4)\, P_{8,4}$.

5. **Permutationer med Gentagelser.** Vi forstaa herved saadanne Permutationer, ved hvilke det samme Element kan forekomme flere Gange i den samme Række. Ved de Rækker, der begynde med a_1, blive da de manglende $m-1$ Elementer ikke som ovenfor at udtage mellem $n-1$, men mellem n Elementer; vi faa derfor, idet vi betegne denne Slags Permutationer ved Π,

$$\Pi_{n,m} = n\, \Pi_{n,m-1},$$
$$\Pi_{n,m-1} = n\, \Pi_{n,m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi_{n,2} = n\, \Pi_{n,1},$$
$$\Pi_{n,1} = n,$$

hvoraf
$$\Pi_{n,m} = n^m.$$

Eks. Antallet af Tal i Rækken $0, 1, 2 \ldots 10^n - 1$ er 10^n. Skrives de Tal, der have færre end n Cifre, som n-cifrede, idet der sættes Nuller foran, danne Tallene i Rækken alle de her betragtede Permutationer af de 10 Cifre til n; Formlen giver altsaa ogsaa Antallet 10^n.

6. **Kombinationer.** Dersom vi mellem n Elementer udtage Grupper paa m uden at tage Hensyn til Ordnen af disse m, danne Grupperne Kombinationer af n til m; vi betegne deres Antal ved $K_{n,m}$.

Da der af hver Gruppe af m Elementer kan dannes $[m]$ Rækker og vi derved faa alle Permutationerne, er

$$[m]\, K_{n,m} = P_{n,m},$$

altsaa

$$K_{n,m} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m} = \frac{[n]}{[m]\;[n-m]}.$$

Da Antallet maa være et helt Tal, ser man heraf, at Produktet af de m første Tal af Talrækken gaar op i Produktet af hvilke som helst m paa hinanden følgende Tal. Endvidere ser man, at Antallet er det samme, hvad enten man kombinerer n til m eller til $n-m$; dette er ogsaa umiddelbart indlysende, thi hvergang man udtager m, lader man $n-m$ blive tilbage.

Eks. Gennem to og to af n vilkaarlige Punkter trækkes rette Linier; hvormange Skæringspunkter, foruden de givne, faa disse Linier?

Gennem 4 vilkaarlige af Punkterne kan man trække 6 Linier, og disse faa 3 ny Skæringspunkter; det søgte Antal er derfor $3\,K_{n,4}$.

7. Ved Opgaver af den her behandlede Art bør man vogte sig for at komme til Rækker. Skal man f. Eks. finde Antallet af Skæringspunkter for n Linier, bør man ikke ræsonnere saaledes: den ene Linie skærer de $n-1$ andre, den næste $n-2$, den næste $n-3$ o. s. v.; men man bør sige: et Skæringspunkt dannes ved Kombinationen af to Linier, altsaa er der $K_{n,2}$ Skæringspunkter.

Eksempler til Øvelse.

1. En Mand har 5 Par Benklæder, 4 Veste og 3 Frakker; hvor ofte kan han vise sig i forskellig Paaklædning?
2. Paa hvormange Maader kunne 52 Kort deles lige mellem 4 Personer?
3. En Plan er bestemt ved 3 Punkter; hvormange Planer kan der lægges gennem tre og tre af n vilkaarlige Punkter, og hvor mange Skæringslinier, der ikke gaa gennem et af de givne Punkter, faa disse Planer?
4. Hvormange forskellige Udtryk kan man, ved Ombytning af Bogstaverne, danne af $(a+b)(c+d)(e+f)\ldots$, hvor Bogstavernes Antal er $2n$?
5. Paa hvormange Maader kunne n Herrer og n Damer sidde om et Bord, naar hver Dame skal sidde mellem to Herrer?
6. Bevis, at Antallet af Tal, der gaa op i $a^m b^n c^p \ldots$, hvor a, b, $c \ldots$ ere Primtal, er
$$(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$$
7. I en Permutation af Tallene $1, 2, 3 \ldots n$ danne to vilkaarlige af Tallene en Inversjon, naar det første er det største. Hvormange Inversioner finder man i alle de $[n]$ Permutationer af Tallene?

Binomialformlen.

8. Man har
$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1 a_2;$$
$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$$
$$= x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x + a_1 a_2 a_3.$$

Vi ville nu søge et almindeligt Udtryk for Produktet

$$P_n = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_n). \qquad (1)$$

For Kortheds Skyld ville vi ved $S_{n,p}$ forstaa Summen af Produkterne af p og p af de n Størrelser a_1, $a_2 \ldots a_n$; man har altsaa

$$\left.\begin{array}{l} S_{n,1} = a_1 + a_2 + \ldots a_n \\ S_{n,2} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n,n} = a_1 a_2 \ldots a_n \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Derved skrives Ligningerne ovenfor

$$P_2 = x^2 + S_{2,1}\, x + S_{2,2},$$
$$P_3 = x^3 + S_{3,1}\, x^2 + S_{3,2}\, x + S_{3,3};$$

man slutter heraf, at man i Almindelighed maa have

$$\left.\begin{array}{l} P_n = x^n + S_{n,1}\, x^{n-1} + S_{n,2}\, x^{n-2} + \ldots \\ \quad + S_{n,p}\, x^{n-p} + \ldots S_{n,n-1}\, x + S_{n,n} \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

For at bevise Rigtigheden af denne Slutning benytte vi det saakaldte Induktionsbevis. Dette bestaar deri, at vi bevise, at dersom Formlen (3) gælder for een Værdi af n, gælder den ogsaa for den følgende Værdi af n; naar dette er bevist, kunne vi slutte, at Formlen er almengyldig, thi den gælder for $n = 3$ og derfor ogsaa for $n = 4$, men gælder den for $n = 4$, gælder den ogsaa for $n = 5$ o. s. v.

Af P_n danne vi P_{n+1} ved Multiplikation med $x + a_{n+1}$; vi faa derved

$$P_{n+1} = x^{n+1} + (S_{n,1} + a_{n+1})\, x^n \ldots$$
$$+ (S_{n,p} + a_{n+1} S_{n,p-1})\, x^{n-p+1} + \ldots a_{n+1} S_{n,n}.$$

Nu bestaar $S_{n+1,p}$ dels af Led, der ikke indeholde Faktoren a_{n+1}, dels af Led, der indeholde denne Faktor; de første Led ere netop $S_{n,p}$; i de sidste kan man sætte den fælles Faktor a_{n+1} uden for en Parentes; i Parentesen

findes da Summen af Produkterne af $p-1$ og $p-1$ af Størrelserne $a_1, a_2 \ldots a_n$; men denne Sum er netop $S_{n,p-1}$; man har altsaa

$$S_{n+1,p} = S_{n,p} + a_{n+1} S_{n,p-1} \qquad (4)$$

og følgelig

$$P_{n+1} = x^{n+1} + S_{n+1,1}x^n + \ldots S_{n+1,p}x^{n-p+1} + \ldots S_{n+1,n+1},$$

der viser, at Formlen (3) gælder for $n+1$, dersom den gælder for n; den gælder altsaa almindelig.

9. Dersom $a_1 = a_2 \ldots = a_n = a$,

bliver $P_n = (x+a)^n$,

medens alle Leddene i $S_{n,p}$ blive a^p. Antallet af saadanne Led er lig det Antal Maader, paa hvilket p Størrelser kunne udtages mellem n, altsaa $K_{n,p}$. Af (3) faar man derved

$$\left.\begin{array}{l}(x+a)^n = x^n + K_{n,1}\, x^{n-1}a \\ \qquad + K_{n,2}x^{n-2}a^2 + \ldots K_{n,p}x^{n-p}a^p + \ldots + a^n\end{array}\right\}, \quad (5)$$

hvor $K_{n,1} = \frac{n}{1}$; $K_{n,2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$; ...

$$K_{n,p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Ved Hjælp af denne Formel, den saakaldte **Binomialformel**, kan en toleddet Størrelse opløftes til n^{te} Potens. Da $K_{n,n-p} = K_{n,p}$, danne Koefficienterne en symmetrisk Række. Have x og a forskellige Fortegn, blive Leddenes Fortegn afvekslende $+$ og $-$. Det er naturligvis underforstaaet, at n er et positivt, helt Tal.

Eks.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$

$$(x-a)^6 = x^6 - 6x^5a + 15x^4a^2 - 20x^3a^3 + 15x^2a^4 - 6xa^5 + a^6.$$

$$(a+bi)^7 = a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6 + i(7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7).$$

Bevis, at $1 + K_{n,1} + K_{n,2} + .. K_{n,\,n-1} + 1 = 2^n$.

Hvilken Formel kan udledes ved Sammenligning af Koefficienterne til x^n i Identiteten

$$(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}?$$

Taylors Formel.

10. Et Udtryk, der indeholder x, og hvis Værdi derfor er afhængig af den Værdi, som man tillægger x, kaldes en Funktion af x. Saaledes er f. Eks. $\sqrt{x}$, $\log . x$, ax^n, $3x^2 + 5x + 1$ o. s. v. Funktioner af x. For Funktioner af x bruges Fællesbenævnelsen $f(x)$, hvor dog f kan erstattes ved andre Bogstaver. $f(x)$ betegner altsaa ethvert Udtryk, der indeholder x. Her ville vi kun betragte hele, rationale Funktioner af x, det vil sige Funktioner af Formen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \dots \tag{1}$$

11. Af en given Funktion af x, $f(x)$, dannes en ny Funktion af x, den afledede Funktion af $f(x)$, paa følgende, rent mekaniske Maade: Af ethvert Led i $f(x)$ dannes et Led af den afledede Funktion, idet man multiplicerer Leddet med Eksponenten til x og trækker 1 fra Eksponenten. Af $4x^3$ dannes saaledes $3 . 4x^{3-1} = 12x^2$; af ax^n dannes nax^{n-1}, af a eller ax^0 dannes $0 . ax^{-1}$, saa at Led, der ikke indeholde x, ingen Betydning faa ved Dannelsen af den afledede Funktion. Den afledede Funktion af $f(x)$ betegnes ved $f'(x)$; af denne kan atter dannes dens afledede Funktion $f''(x)$, og saaledes dannes videre $f'''(x) .. f^{(n)}(x)$.

Eks. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5x - 1.$
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 12x + 5.$
$f''(x) = 12x^2 - 18x + 12.$
$f'''(x) = 24x - 18.$
$f^{IV}(x) = 24.$
$f^{V}(x) = 0.$

Man ser let, at dersom $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots$, bliver $f^{(n)}(x) = a_0 n(n-1) \ldots 3 . 2 . 1$, medens de følgende afledede Funktioner ere Nul.

12. Det hænder ofte ved Anvendelser af Algebraen, at man i en Funktion af x skal ombytte x med $x + h$, hvor h er vilkaarlig, og man ønsker da i Reglen Resultatet ordnet efter Potenser af h. Saaledes af

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

faar man

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 2(x+h) + 1$$
$$= 3x^2 + 2x + 1 + h(6x+2) + 3h^2.$$

Denne Ordning kan naturligvis altid i de forekommende Tilfælde udføres, idet man udvikler de forekommende Potenser af $x + h$ efter Binomialformlen og ordner; man kan imidlertid ved Hjælp af de afledede Funktioner danne en almindelig Formel.

Af $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$
dannes

$$f(x+h) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + a_2 (x+h)^{n-2} + \ldots,$$

hvor

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1 . 2} x^{n-2} h^2 \ldots$$

$$(x+h)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1} x^{n-2} h + \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} x^{n-3} h^2 + \ldots$$

$$(x+h)^{n-2} = x^{n-2} + \frac{n-2}{1} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2} x^{n-4} h^2 + \ldots$$

. . . .

For at faa $f(x+h)$ multiplicerer man disse Ligninger henholdsvis med a_0, a_1, a_2 ... og adderer. Man faar derved

$$f(x+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots,$$

hvor

$$A_0 = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \qquad = f(x)$$

$$A_1 = \frac{n}{1} a_0 x^{n-1} + \frac{n-1}{1} a_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} a_2 x^{n-3} + \ldots = f'(x)$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{1.2} a_0 x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_1 x^{n-3} + \ldots = \frac{1}{1.2} f''(x)$$

. . . .

hvorved

$$\left. \begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ &+ f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + a_0 . h^n \end{aligned} \right\}, \qquad (2)$$

idet $f^{(n)}(x) = a_0 n(n-1)(n-2) \ldots 3 . 2 . 1.$

Denne Formel er bekendt under Navn af Taylors Formel; det er her forudsat, at n er et helt, positivt Tal.

Eks. Hvad bliver $f(x+1)$, naar

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1 ?$$

Man har

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1 ; \; f'(x) = 3x^2 + 4x + 1;$$

$$f''(x) = 6x + 4 ; \; f'''(x) = 6 ; \; h = 1 ,$$

altsaa

$$f(x+h) = x^3 + 2x^2 + x - 1 + (3x^2 + 4x + 1) h$$
$$+ (3x+2) h^2 + h^3 ; \; f(x+1) = x^3 + 5x^2 + 8x + 3.$$

13. Af

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

følger

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + \ldots$$

Denne Ligning er identisk, og vi kunne derfor overalt sætte $h = 0$; derved falde alle Led paa højre Side af

Lighedstegnet undtagen $f'(x)$ bort. Brøken paa venstre Side bliver ubestemt, men faar en vis Grænseværdi, naar h nærmer sig til Nul (I, 122); man har altsaa

$$f'(x) = \lim . \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{3}$$

hvor Tegnet lim . betyder, at man paa højre Side skal tage Grænseværdien, det vil sige den Værdi, til hvilken Brøken nærmer sig, naar h aftager mod Nul. Saaledes faar man f. Eks. for $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim . \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim . \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$= \lim (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

14. Medens der ifølge vor Definition kun kan dannes afledede Funktioner af hele, rationale Funktioner, har derimod Brøken i (3) en Grænseværdi ogsaa for andre Funktioner. Differentialregningen gaar ud paa at bestemme denne Grænseværdi for alle Funktioner, og, idet man da ved $f'(x)$ forstaar denne, viser man, at Taylors Formel med visse Indskrænkninger bliver almengyldig.

Eks. $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \lim \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

Multipliceres Brøkens Tæller og Nævner med

$$\sqrt{x+h} + \sqrt{x},$$

faar man

$$f'(x) = \lim \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. Find $f(x-2)$, naar $f(x) = 3x^3 - x - 1$.
2. Find $f(x+h)$, naar $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.
3. Find $f'(x)$, naar $f(x) = (x+a)^n$.
4. Find $f'(x)$, naar $f(x) = \frac{1}{x}$.

Kædebrøk.

15. En Kædebrøk er en Sum af et helt Tal og en Brøk, hvis Tæller er 1, og hvis Nævner er en ny Kædebrøk.

Skal en Brøk forvandles til Kædebrøk, skrives den som blandet Tal; Brøken i dette skrives som 1, divideret med den omvendte Brøk, der atter skrives som et blandet Tal o. s. v.

Eks.

$$\frac{85}{33} = 2 + \frac{19}{33}; \quad \frac{19}{33} = \frac{1}{1 + \frac{14}{19}}; \quad \frac{14}{19} = \frac{1}{1 + \frac{5}{14}} \text{ o.s.v.,}$$

altsaa

$$\frac{85}{33} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Man ser let, at man netop udfører de samme Regninger, som naar man søger største fælles Faktor for Tæller og Nævner, og at de Tal, som man søger, netop ere de Kvotienter, som faas ved Divisjonerne.

Eks. $\frac{117}{41}$, $\frac{331}{75}$ og $\frac{113}{400}$ forvandles til Kædebrøker.

16. Den almindelige Form for en Kædebrøk er

$$\frac{y}{z} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

hvor a_0, a_1, a_2.. kaldes de ufuldstændige Kvotienter, medens enhver af disse, naar den følgende Kædebrøk adderes til den, giver en fuldstændig Kvotient; den til a_p svarende fuldstændige Kvotient

ville vi betegne ved x_p; man har altsaa

$$\frac{y}{z} = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \text{ o. s. v.}$$

Dersom man standser Kædebrøken ved en ufuldstændig Kvotient og bortkaster det øvrige, faar man en Konvergent til Kædebrøken. Standse vi ved a_p, faa vi saaledes en Konvergent, hvis Tæller og Nævner vi ville betegne henholdsvis ved y_p og z_p; man har altsaa

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}; \quad \frac{y_1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} \text{ o. s. v.,}$$

der egentlig bør skrives

$$y_0 = a_0, \; z_0 = 1; \; y_1 = a_0 a_1 + 1, \; z_1 = a_1 \text{ o. s. v.}$$

17. **Beregning af Konvergenterne.** Man har ved almindelig Reduktion

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}; \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1};$$

$$\frac{y_2}{z_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 y_1 + y_0}{a_2 z_1 + z_0};$$

$$\frac{y_3}{z_3} = \frac{a_3 y_2 + y_1}{a_3 z_2 + z_1} \text{ o. s. v.}$$

Man slutter heraf, at man almindelig maa have

$$\frac{y_r}{z_r} = \frac{a_r y_{r-1} + y_{r-2}}{a_r z_{r-1} + z_{r-2}}, \tag{1}$$

og Slutningens Rigtighed vises ved Induktion. Betragtning af Kædebrøken viser, at man kan danne $\frac{y_{r+1}}{z_{r+1}}$ af $\frac{y_r}{z_r}$ ved i den sidste for a_r at sætte $a_r + \frac{1}{a_{r+1}}$; man faar altsaa, hvis (1) gælder,

$$\frac{y_{r+1}}{z_{r+1}} = \frac{\left(a_r + \frac{1}{a_{r+1}}\right) y_{r-1} + y_{r-2}}{\left(a_r + \frac{1}{a_{r+1}}\right) z_{r-1} + z_{r-2}} = \frac{a_{r+1} y_r + y_{r-1}}{a_{r+1} z_r + z_{r-1}},$$

der viser, at (1) gælder for enhver Værdi af r, dersom den gælder for den nærmest lavere.

Man kan nu let danne Konvergenterne efterhaanden, idet man først opskriver de to første og benytter (1).

Eks. 1. Ere de ufuldstændige Kvotienter 2, 1, 1, 2, 1, 3, 2, faar man Konvergenterne

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{5},\ \frac{18}{7},\ \frac{67}{26},\ \frac{152}{59};$$

den sidste Konvergent er selve Kædebrøken.

Eks. 2. Find Konvergenterne, naar de ufuldstændige Kvotienter ere 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3.

Eks. 3. Find Konvergenterne til Kædebrøken

(a, a, a, a, a, a, a) *).

18. (1) viser, at enhver Konvergent ligger mellem de to foregaaende og nærmest ved den sidste (I, 81); dens Tæller og Nævner ere nemlig dannede ved Addition af de to foregaaendes, efter at den sidste af disse i Tæller og Nævner er multipliceret med a_r. Sætter man x_r for a_r, faar man selve Kædebrøken i Stedet for Konvergenten $\frac{y_r}{z_r}$; selve Kædebrøken ligger derfor ogsaa mellem to hvilke som helst paa hinanden følgende Konvergenter og nærmest ved den sidste.

19. Lad os nu paa en vertikal ret Linie afsætte Punkterne A_0, A_1, A_2 . . , hvis Højder angive Konvergenternes Værdier. A_1 ligger da over A_0; A_2 falder mellem A_1 og A_0 og nærmest ved A_1; A_3 falder mellem A_2 og A_1, nærmest ved A_2 o. s. v. Da den sidste Konvergent er selve Kædebrøken, slutte vi heraf, at:

*) En Kædebrøk betegnes ofte saaledes ved sine ufuldstændige Kvotienter.

Kædebrøken er større end Konvergenterne med lige, mindre end Konvergenterne med ulige Indeks; Konvergenten med Indeks 0 er den mindste, den med Indeks 1 den største af dem alle.

20. Ligningen (1) staar egentlig i Stedet for de to Ligninger

$$\left.\begin{array}{l} y_r = a_r y_{r-1} + y_{r-2} \\ z_r = a_r z_{r-1} + z_{r-2} \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Af disse faas, naar a_r elimineres,

$$y_r z_{r-1} - z_r y_{r-1} = -(y_{r-1} z_{r-2} - z_{r-1} y_{r-2}),$$

der viser, at man i et Udtryk som det paa venstre Side af Lighedstegnet kan gøre Indeks 1 lavere, naar man samtidig giver Udtrykket modsat Fortegn; fortsætter man paa denne Maade, faar man tilsidst

$$y_1 z_0 - z_1 y_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1.$$

For $r = 1$ faa vi altsaa Værdien 1, for $r = 2$ faa vi da Værdien -1 o. s. v., saa at man almindelig har

$$y_r z_{r-1} - z_r y_{r-1} = (-1)^{r-1}. \qquad (3)$$

Heraf følger, at Konvergenterne ikke kunne forkortes.

Man faar nu

$$\frac{y_r}{z_r} - \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-1}}{z_r z_{r-1}}. \qquad (4)$$

Denne Ligning viser, at Forskellen mellem to paa hinanden følgende Konvergenter bliver numerisk mindre og mindre, jo større r bliver, og at denne Forskel er afvekslende positiv og negativ. Da Kædebrøken ligger mellem de to Konvergenter, ser man tillige, at man ved for Kædebrøken at sætte $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ begaar en Fejl, der er mindre end $\frac{1}{z_{r-1}^2}$.

21. **Enhver Brøk, hvis Nævner er mindre end en Konvergents Nævner, kan ikke ligge Kædebrøken saa nær som denne Konvergent.**

Lad Konvergenten være $\frac{y_r}{z_r}$ og $q < z_r$; da er

$$\frac{p}{q} - \frac{y_r}{z_r} = \frac{pz_r - qy_r}{qz_r}; \quad \frac{p}{q} - \frac{y_{r+1}}{z_{r+1}} = \frac{pz_{r+1} - qy_{r+1}}{qz_{r+1}},$$

hvor de to Differensers numeriske Værdier er større end $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$, da deres Tællere mindst ere 1. $\frac{p}{q}$ kan derfor ikke ligge mellem de to Konvergenter, da disses Forskel er $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$; Forskellen mellem $\frac{p}{q}$ og Kædebrøken maa da være større end i alt Fald den ene af Differenserne ovenfor og derfor ogsaa større end $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$, der atter er større end Forskellen mellem Kædebrøken og $\frac{y_r}{z_r}$; denne Konvergent er derfor nærmere ved Kædebrøken end $\frac{p}{q}$.

Konvergenterne have altsaa den Egenskab, at de for Kædebrøken give tilnærmede Udtryk, der skrives med mindre Tal end alle andre Brøker, der udtrykke Kædebrøken med lige saa stor Nøjagtighed.

22. Kædebrøker kunne være uendelige, men maa da have en irrational Værdi, da alle rationale Tal forvandles til endelige Kædebrøker. Kædebrøkens irrationale Værdi er den Grænseværdi, til hvilken Konvergenterne nærme sig, naar Indeks vokser uden Grænse.

En uendelig Kædebrøk kan være **periodisk** (ren eller blandet), idet de samme ufuldstændige Kvotienter stadig gentages i samme Orden; Værdien af en saadan Kædebrøk bestemmes som Rod i en kvadratisk Ligning. Er f. Eks. $x = (\overline{1,\ 2,\ 3},\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$,

har man
$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}},$$
idet Kædebrøken maa have Værdien x, selv om man afskærer den første Periode; Konvergenterne ere
$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{10}{7}, \quad \frac{10x+3}{7x+2},$$
hvor den sidste er selve Kædebrøken; man har altsaa
$$7x^2 + 2x = 10x + 3, \text{ hvoraf } x = \frac{4 + \sqrt{37}}{7},$$
idet den negative Værdi af x maa forkastes. Omvendt kan en positiv Rod i en kvadratisk Ligning udvikles i en uendelig periodisk Kædebrøk; vi ville kun vise dette ved et Eksempel.

Eks. Er $x = \sqrt{13}$, sætte vi $x = 3 + \frac{1}{x_1}$, idet 3 er det største hele Tal i $\sqrt{13}$; vi faa da
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{x_2},$$
idet Brøken ligger mellem 1 og 2; nu er
$$x_2 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{x_3};$$
$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{x_4}.$$
Fortsætte vi saaledes, faa vi
$$x = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}, 1, 1 \ldots).$$

Eks. 1. Find Konvergenterne til (2, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 4).

2. Find Konvergenterne til 431273 : 391524.

3. Find Værdien af $(1, 2, \overline{2, 1, 3}, 2, 1, 3 \ldots)$; beregn den sjette Konvergent og undersøg Afvigelsen.

4. Find de 4 første Konvergenter til 3,14159265.

Om hele Tal.

23. Den ubestemte Ligning af første Grad. Ligningen

$$ax - by = c \qquad (1)$$

kan ikke bestemme de to ubekendte x og y. I Stedet for den manglende Ligning kan man sætte den Bestemmelse, at x og y skulle være hele Tal. a, b og c antages at betegne hele Tal. a og b kunne forudsættes indbyrdes primiske, da en fælles Faktor for a og b ogsaa, hvis Opgaven er mulig, maatte findes i c og da kunde bortdivideres.

Ligningen har uendelig mange Løsninger, men disse findes let alle, naar man kender een Løsning. Antag nemlig, at Ligningen tilfredsstilles af $x = \alpha$ og $y = \beta$; man har da

$$a\alpha - b\beta = c$$

og ved Subtraktion fra (1)

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0, \text{ hvoraf } \frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Da $\frac{b}{a}$ er en uforkortelig Brøk, maa man her have (I, 99)

$$x - \alpha = mb;\ y - \beta = ma,$$

altsaa

$$x = \alpha + mb;\ y = \beta + ma, \qquad (2)$$

hvor m er et vilkaarligt helt Tal.

Ofte er det tillige givet, at x og y skulle være positive; man kan i saa Fald kun benytte saadanne Værdier af m, for hvilke

$$\alpha + mb > 0;\ \beta + ma > 0.$$

24. Vi behøve saaledes kun at finde een Løsning for at kende alle Løsninger. Til at finde den ene Løsning har man forskellige Methoder.

1) Da Værdierne af x danne en Differensrække med Differensen b, maa to vilkaarlige Tal med denne Differens

enten begge være Værdier af x, eller ogsaa maa der mellem dem ligge en Værdi af x. Man prøver derfor, idet man for x indsætter alle hele Tal fra $-\frac{1}{2}b$ til $\frac{1}{2}b$ (eller for y alle Tal fra $-\frac{1}{2}a$ til $\frac{1}{2}a$), til man finder det, for hvilket y (eller x) ogsaa bliver et helt Tal.

Eks. $3x - 11y = 5$.

For y indsættes -1, 0 og $+1$; $y = -1$ giver $x = -2$; den fuldstændige Løsning er altsaa

$$x = -2 + 11m;\quad y = -1 + 3m.$$

2) Dersom Koefficienten til x er negativ, forandres alle Tegnene; er Koefficienten til y derefter positiv, sættes $y = -y_1$.

Man udvikler $a : b$ i Kædebrøk og beregner Konvergenterne; lad den næstsidste af disse være $p : q$; man har da (20)

$$aq - bp = \pm 1,\quad \text{altsaa} \pm acq \mp bcp = c,$$

hvoraf $x = \pm cq + mb$; $y = \pm cp + ma$.

Tallene $\pm cq$ og $\pm cp$ blive ofte store; man kan da faa dem erstattede ved mindre ved for m at sætte $(m - a)$ og give a en passende hel Værdi.

Eks. $152x - 59y = 13$.

Den næstsidste Konvergent til $152 : 59$ er $67 : 26$; man har nu

$$152 \,.\, 26 - 59 \,.\, 67 = -1$$

eller $152 \,.\, (-338) - 59 \,.\, (-871) = 13$;

altsaa $x = -338 + 59(m + 6) = 16 + 59m$,

$$y = -871 + 152(m + 6) = 41 + 152m.$$

Har man to Ligninger med 3 ubekendte, elimineres den ene, og Endeligningen behandles som ovenfor lært; har man to ubekendte flere, end man har Ligninger, kan den ene ubekendte vælges vilkaarlig, og for hver Værdi af denne bestemmes da de andre ubekendte.

25. **Fermats Sætning.** D e r s o m p e r e t P r i m t a l, g a a r p o p i

$$a^{p-1} - 1,$$

naar a er et vilkaarligt Tal, der ikke er deleligt med p.

Dersom to Tal a og b ved Divisjon med et Tal p give samme Rest, siger man, at a er k o n g r u e n t med b for Modulus p; det skrives

$$a \equiv b \text{ (mod. } p).$$

Vi skulle altsaa bevise, at, idet p er et Primtal,

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p). \qquad (3)$$

Tallene a, $2a$, $3a \ldots (p-1)a$ ere ikke delelige med p, og to af dem kunne ikke ved Divisjon med p give samme Rest, da p i saa Fald maatte gaa op i deres Differens, hvilket man let ser er umuligt. De $p - 1$ Tal maa altsaa ved Divisjon med p give $p - 1$ forskellige Rester, hvoriblandt 0 ikke findes; disse Rester maa da være Tallene $1, 2, 3, \ldots p-1$, uden at vi dog vide Noget om den Orden, i hvilken de fremkomme. Produktet af alle Tallene maa give samme Rest som Produktet $1 . 2 . 3 \ldots (p-1)$ (I. 88).

Altsaa har man

$$a . 2a . 3a \ldots (p-1)\, a \equiv [p-1] \text{ (mod. } p)$$

eller

$$[p-1]\, a^{p-1} - [p-1] = [p-1]\,(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

p gaar saaledes op i Produktet $[p-1]\,(a^{p-1} - 1)$; da nu p ikke gaar op i den første Faktor, maa p gaa op i $a^{p-1} - 1$.

26. Den ubestemte Ligning

$$x^{p-1} - 1 = yp$$

eller, som det kaldes, Kongruensen

$$x^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. } p) \qquad (4)$$

har altsaa til Løsninger alle mulige hele Værdier af x, der ikke ere delelige med p. Dersom et Tal x tilfredsstiller Kongruensen (4), men ikke nogen Kongruens af samme Form, men med lavere Eksponent, kaldes x en *primitiv* Rod i Kongruensen. Saaledes er i Kongruensen

$$x^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

2 og 3 primitive Rødder, medens 4 ikke er det, da man har $4^2 \equiv 1$.

Læren om de primitive Rødder har mange vigtige Anvendelser, især i Ligningernes Theori.

27. **Wilsons Sætning.** Dersom p er et Primtal, gaar p op i $[p-1]+1$.

Ligningen

$$ax - py = 1 \text{ eller } ax \equiv 1 \pmod{p}$$

har, som vi have vist (24), altid een og kun een Værdi af x mellem 0 og p, naar a ikke er delelig med p.

Vælge vi et Tal $a < p$, finde vi altsaa et saadant Tal $x < p$, at $ax \equiv 1$; a og x ere forskellige undtagen for $a = 1$ og $a = p - 1$; dersom nemlig $x = a$, bliver $a^2 \equiv 1$ eller $a^2 - 1 \equiv 0$. p maa da gaa op i $a - 1$ eller $a + 1$, og dette er kun muligt i de to nævnte Tilfælde.

Tallene 2, 3, ... $(p - 2)$ kunne altsaa tages sammen to og to, saa at Produktet af to sammenhørende ved Divisjon med p giver Resten 1. Produktet $[p - 1]$ giver altsaa Resten -1, som det skulde bevises.

Dersom $p\ (> 4)$ ikke er et Primtal, ser man let, at $[p - 1]$ er delelig med p. Wilsons Sætning angiver saaledes en Egenskab, som findes ved alle Primtal, men ikke ved andre Tal.

28. **Talsystemer.** I Stedet for 10 kan man som Grundtal for et Talsystem benytte et andet helt Tal k;

man maa da have Cifre for Tallene 0, 1, 2 . . $k-1$; for Øvrigt bibeholdes den Regel for Skrivemaaden, at et Ciffer faar en k Gange højere Værdi, for hver Plads det rykker mod venstre. Det Tal, der fra højre mod venstre skrives med Cifrene a, b, c, d . . . ., har altsaa Værdien

$$a + bk + ck^2 + dk^3 + \ldots .$$

Sætninger om dette Tals Delelighed med Tal, der gaa op i k, k^2 . . $k - 1$, $k + 1$, udledes som de analoge Sætninger om Tal i Titalsystemet (I, 92).

Eks. For at skrive 1735 i Syvtalsystemet dividere vi med 7 og finde $1735 = 247 . 7 + 6$; endvidere er $247 = 35 . 7 + 2$; $35 = 5 . 7 + 0$, saa at 1735 i Syvtalsystemet skrives 5026.

Eksempler til Øvelse.

1. $139x + 51y = 1705$. (x og y pos. hele Tal).
2. En Mand købte Svin og Faar for 530 Kroner; hvert Svin kostede 29 Kr., hvert Faar 31 Kr.; hvormange købte han af hver Slags?
3. Find den laveste primitive Rod i $x^{16} \equiv 1$ (mod. 17).
4. En Mand købte 100 Dyr for 325 Kr., nemlig Ænder til 2 Kr., Gæs til 7 Kr. og Lam til 5 Kr. Stykket; hvormange fik han af hver Slags?
5. Bevis, at $a^7 - a$ er delelig med 42, naar a er et helt Tal.
6. Hvorledes skrives 17923 i Femtalsystemet?
7. Hvorledes skrives 29132 i Tolvtalsystemet, naar vi for 10 og 11 benytte Cifrene α og β?
8. I hvilket Talsystem skrives 15247 som 10501?

9. Hvilket Tal, mindre end 1000, giver ved Divisjon med 17, 19 og 35 henholdsvis Resterne 16, 7 og 25?

10. Siderne i en retvinklet Trekant udtrykkes ved tre hele, indbyrdes primiske Tal; hvilke Værdier kunne disse have?

Determinanter.

29. Man benytter den forkortede Betegnelse

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix},$$

der kaldes en Determinant af anden Orden; Determinanten af n^{te} Orden

$$D = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \dots k_1 \\ a_2 b_2 c_2 \dots k_2 \\ a_3 b_3 c_3 \dots k_3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n c_n \dots k_n \end{vmatrix}$$

med n Rækker, n Søjler og n^2 Elementer betegner en flerleddet Størrelse, hvis Led ere alle de Produkter af n af Elementerne, der kunne dannes saaledes, at der ikke i samme Produkt findes to Elementer af samme Række eller to Elementer af samme Søjle. Det samme Bogstav eller den samme Indeks kan altsaa ikke findes to Gange i samme Produkt. Det halve Antal af Leddene faar Fortegnet $+$, det halve Antal $-$, efter en Regel, som vi straks skulle angive. Leddet $a_1 b_2 c_3$ .. (Diagonalrækken) har altid Fortegnet $+$ og kaldes det principale Led. Determinanten betegnes undertiden ved dette Led, sat i en Parentes.

30. Af det principale Led

$$a_1 b_2 c_3 \ldots k_n$$

kan man danne de andre Led ved at lade Bogstaverne blive staaende og ombytte deres Indices paa alle mulige Maader. Derved faas nemlig alle mulige Produkter, i hvilke hverken et Bogstav eller en Indeks forekommer to Gange.

Antallet af Led i en Determinant af n^{te} Orden, hvor intet Element er Nul, er følgelig $[n]$.

Fortegnet for et Led bestemmes paa følgende Maade: De n Elementer, der forekomme i Leddet, tænkes, som de staa i Determinanten, forbundne to og to paa alle mulige Maader; hvis der da imellem Forbindelseslinierne findes et ulige Antal, der gaa opad tilhøjre, faar Leddet —, ellers +.

Eks.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \end{array}$$

Antallet af Forbindelseslinier, der gaa opad tilhøjre, er i de 6 Led henholdsvis 0, 2, 2, 1, 1, 3. De 6 Led ere dannede af det første ved i dette at permutere Indices paa alle Maader. Hvor en lavere Indeks staar efter en højere (de to Indices siges da at danne en **Inversjon**), ville de to Elementers Forbindelseslinie gaa opad tilhøjre, saa at man ogsaa kan bestemme et Leds Fortegn ved Antallet af Inversjoner i de n Bogstavers Indices.

31. **En Determinant forandres ikke ved, at Rækkerne gøres til Søjler og omvendt, naar for Resten Følgeordnen bibeholdes.**

Da man danner alle de Led, hvis Faktorer findes, een i hver Række og een i hver Søjle, blive Leddene i

begge Tilfælde de samme. Et Led faar ogsaa i begge Tilfælde samme Fortegn, thi et Elements nye Plads er symmetrisk med den oprindelige Plads med Hensyn til Diagonalrækken, og man ser let, at de Forbindelseslinier, der gaa opad tilhøjre før Ombytningen, ogsaa gøre det efter Ombytningen.

32. En Determinant skifter Fortegn, dersom to af dens Rækker (Søjler) ombyttes.

Dersom de to Rækker følge efter hinanden, ville alle Forbindelseslinier vedblive at være af samme Art, undtagen den, der forbinder de to Elementer i de ombyttede Rækker. Denne erstattes ved en Forbindelseslinie af den modsatte Art, og ethvert Led skifter derfor Fortegn.

Er der p Rækker mellem de to, der ombyttes, kan man først bringe den øverste paa sin Plads ved $p + 1$ Ombytninger med den nærmest lavere; den nederste bringes derpaa paa sin Plads ved p Ombytninger med den nærmest højere; da der derved er foretaget $2p + 1$ Ombytninger, og Determinanten for hver af disse skifter Tegn, har den faaet modsat Fortegn, naar den endelige Ombytning er udført.

Heraf følger, at en Determinant er Nul, naar den har to ens Rækker (Søjler); den skifter nemlig Tegn og bliver dog uforandret, naar de to Rækker ombyttes.

33. En Determinant multipliceres med et Tal, naar alle Elementer i en af dens Rækker (Søjler) multipliceres med Tallet.

Af de multiplicerede Elementer findes nemlig eet og kun eet i hvert af Determinantens Led.

34. **Underdeterminanter.** Sættes a_1 uden for en Parentes i de Led af Determinanten, hvor a_1 findes, faar man inden i Parentesen alle de Led, der kunne dannes af

$$b_2 c_3 d_4 \ldots,$$

naar Indices ombyttes paa alle Maader; disse Led ere de samme som de, man faar ved at udslette den Række og den Søjle, hvori a_1 findes, og udvikle den Determinant af Ordnen $n-1$, der bliver tilbage. Denne Determinant kaldes den til a_1 svarende Underdeterminant og betegnes ved A_1.

De Led, der indeholde a_2, kunne ligeledes skrives $a_2 A_2$, hvor A_2 da er den Determinant, der bliver tilbage, naar den første Søjle og anden Række udslettes. Dog har denne Determinant og A_2 modsatte Fortegn, thi ombytte vi de to første Rækker, skifte alle Led Fortegn, og den til a_2 svarende Underdeterminant findes nu ved at udslette den første Række og den første Søjle.

Fortsætte vi saaledes, faa vi for Determinanten D

$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots a_n A_n, \qquad (1)$$

hvor enhver af Underdeterminanterne A_p findes ved at udslette den Række og den Søjle, hvori a_p findes, og give den tiloversblevne Determinant af Ordnen $n-1$ $+$ eller $-$, eftersom p er ulige eller lige.

Paa lignende Maade faar man

$$D = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots b_n B_n$$
$$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + \ldots c_n C_n \text{ o. s. v.,}$$

hvor enhver Underdeterminant er dannet ved at udslette den Række og Søjle, der indeholder det tilsvarende Element, idet dog den tiloversblevne Determinant faar modsat Fortegn, naar Rækkens Nummer plus Søjlens Nummer er et ulige Tal. Rigtigheden heraf indses let, naar man

gør den udslettede Række til den første Række og den udslettede Søjle til den første Søjle.

Paa samme Maade kan man opløse en Determinant i Underdeterminanter ved at gaa ud fra Elementerne i en Række; man faar da

$$\begin{aligned} D &= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \ldots \\ &= a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Sætter man i disse eller de forrige Ligninger en anden Rækkes (Søjles) Elementer i Stedet for den benyttede Rækkes (Søjles), faar man en Determinant med to ens Rækker (Søjler); da denne er Nul, har man

$$\left.\begin{aligned} a_k A_1 + b_k B_1 + c_k C_1 + \ldots &= 0 \\ d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

i alle Tilfælde, hvor k ikke er 1, og d ikke er a.

35. En Determinant forandres ikke, naar man til en Rækkes (Søjles) Elementer adderer en anden Rækkes (Søjles) Elementer, multiplicerede med et vilkaarligt Tal.

Sætter man nemlig i (1) $a_k + md_k$ for a_k, faar man

$$(a_1 + md_1) A_1 + (a_2 + md_2) A_2 + \ldots (a_n + md_n) A_n$$

eller

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots a_n A_n + m (d_1 A_1 + d_2 A_2 + \ldots d_n A_n),$$

der netop er D, da Størrelsen i Parentesen er Nul.

Ved Anvendelse af denne Sætning kan man ændre en Determinant, saa at alle Leddene i en Række (Søjle) blive Nul paa eet nær, og saaledes reducere Determinanten til en anden, der er en Orden lavere.

Eks.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

36. **Løsning af n lineære Ligninger med n Ubekendte.** Lad de n Ligninger med n Ubekendte

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \ldots i_1x_n = k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \ldots i_2x_n = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 \ldots i_nx_n = k_n \end{array} \quad (4)$$

være givne.

$$D = \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \ldots i_1 \\ a_2b_2c_2 \ldots i_2 \\ \ldots\ldots \\ a_nb_nc_n \ldots i_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

kaldes Ligningernes Determinant; multiplicere vi Ligningerne henholdsvis med A_1, $A_2 \ldots A_n$, og addere vi derpaa, faa vi som Koefficient til x_1

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots a_nA_n = D$$

og som Koefficient til x_2

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \ldots b_nA_n = 0,$$

og paa samme Maade blive de øvrige Koefficienter Nul; man faar altsaa

$$Dx_1 = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots k_nA_n. \quad (6)$$

Paa lignende Maade faas ved Multiplikation med B_1, $B_2 \ldots$ og Addition

$$Dx_2 = k_1B_1 + k_2B_2 + \ldots + k_nB_n \text{ o. s. v.}$$

Enhver af de ubekendte er altsaa lig en Brøk, hvis Nævner er Ligningernes Determinant, og hvis Tæller dannes af Ligningernes Determinant ved i denne at ombytte den ubekendtes Koefficienter med de tilsvarende Tal paa højre Side af Lighedstegnene.

Dersom $D = 0$, og A_1 er en Underdeterminant, der ikke er 0, multiplicere vi som ovenfor med A_2, $A_3 \ldots A_n$ og addere de $n - 1$ Ligninger. Vi faa da ved at benytte (2) og (3)

$$-A_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + i_1x_n) = k_2A_2 + k_3A_3 + \ldots + k_nA_n,$$

der viser, at den ene Ligning enten kan udledes af de andre eller er i Strid med dem.

37. **Elimination af $n-1$ Størrelser mellem n lineære Ligninger.**

Ligningerne skrives som sædvanligt, blot at alle Leddene samles paa venstre Side af Lighedstegnene. Slettes de ubekendte ud, behøver man blot at sætte to Streger til for at faa en Determinant, som, sat lig Nul, er Resultatet af Eliminationen. Ere Ligningernes bekendte Led k_1, $k_2 \ldots k_n$, faar man dette Resultat ved at multiplicere Ligningerne med de til disse Elementer svarende Underdeterminanter og addere.

Saaledes faar man f. Eks. ved Elimination af x og y mellem Ligningerne

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Endeligningen

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

38. **Determinanters Multiplikation.** Vi betragte de tre Systemer af n Ligninger

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad a_px_1 + b_px_2 \ldots + i_px_n = k_p \\ &2)\quad a'_py_1 + b'_py_2 \ldots + i'_py_n = x_p \\ &3)\quad \alpha_py_1 + \beta_py_2 \ldots + \iota_py_n = k_p \end{aligned}\right\} (p = 1, 2 \ldots n)$$

med Determinanterne D_1, D_2 og Δ. Ligningerne 3 ere dannede ved at indsætte Værdierne af Størrelserne x af 2 i 1. Søge vi først Størrelserne x af 1 og derpaa y af 2, faa vi disse som Brøker med Nævneren D_1D_2,

medens vi ved at søge Størrelserne y af 3 faa Nævneren Δ; man har derfor, da de to Nævnere ere af samme Grad,

$$D_1 D_2 = \Delta,$$

hvor Elementerne af Δ ere

$$a_p a'_1 + b_p a'_2 + \ldots + i_p a'_n$$

og de analoge. Vi kunne derved multiplicere to Determinanter af n^{te} Orden, saa at Produktet ogsaa er en Determinant af n^{te} Orden. Er den ene Faktor af en lavere Orden, bringer man den til at være af n^{te} Orden ved at tilføje Elementer 1 i Diagonalrækken, medens de andre Pladser fyldes med Nuller.

Eks. 1.

$$x + y + z = 1;\ ax + by + cz = d;\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$$

$$x = K : D, \text{ hvor}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+b \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a);$$

$$K = (b-d)(c-b)(c-d) \text{ o. s. v.}$$

Eks. 2. Løs ved Determinanter Opgaverne i I. Pg. 65 Eks. 1, Pg. 67 Eks. 9 og Pg. 68 Eks. 15.

Eks. 3. I Determinanten af tredje Orden i 30 ombyttes a_1, b_1, c_1, $a_2 \ldots$ med de tilsvarende Underdeterminanter A_1, $B_1 \ldots$; bevis, at den ny Determinant er Kvadratet af den givne. Hvorledes lyder den analoge almindelige Sætning?

Eks. 4. Eliminer Siderne mellem

$$a = b \cos C + c \cos B$$

og de to analoge Relationer mellem en Trekants Stykker.

Imaginære Størrelser.

39. I Planen tage vi to paa hinanden vinkelrette Linier OX og OY; vi have da tidligere set, at ethvert positivt eller negativt Tal kan repræsenteres ved et Punkt paa OX, idet vi regne Retningen fra O (Nulpunktet) mod X positiv, den modsatte Retning negativ; vi udvide nu dette, idet vi repræsentere det imaginære (komplekse) Tal $a + bi$ ved det Punkt, som vi finde, naar vi fra det til a svarende Punkt af OX afsætte Linien b i Retningen OY, dersom b er positiv, i den modsatte Retning, dersom b er negativ. Til ethvert Tal, reelt eller imaginært, svarer da eet Punkt af Planen, og omvendt.

Vi udvide nu ogsaa Regningsarternes Begreber og have her to Hensyn at tage: Udvidelsen bør vælges saaledes, at man regner med komplekse Tal efter de samme Regler, som gælde for reelle Tal, og de for reelle Tal fastslaaede Begreber bør være indbefattede i de ny som specielle Tilfælde. I det følgende betegne vi reelle Tal ved a, b.., komplekse Tal ved x, y... Ved Punktet x forstaa vi det Punkt, der repræsenterer Tallet x.

40. **Modulus og Argument.** Den følgende Undersøgelse vil lettes ved Anvendelse af trigonometriske Funktioner; i $x = a + ib$ sætte vi

$$a = r \cos v; \quad b = r \sin v, \tag{1}$$

altsaa

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} v = \frac{b}{a}, \tag{2}$$

hvorved

$$a + ib = r(\cos v + i \sin v).$$

r kaldes Størrelsens Modulus, v dens Argument. r regnes altid positiv; naar a og b ere givne, findes r og v af (2). Da (1) viser, at Fortegnene for a og b

bestemme den Kvadrant, i hvilken v ligger, har v kun een Værdi imellem 0 og 2π.

Af en Figur ses let, at r er Længden af den Linie, der forbinder O med x, og at v er den Vinkel, som denne Linie danner med OX.

To komplekse Tal, der have samme Modulus og Argumenter, der ere lige store med modsatte Tegn, kaldes konjugerede ($a + ib$ og $a - ib$).

Positive Tal have Argumentet 0, negative Tal Argumentet π, medens Modulus i begge Tilfælde er Tallets numeriske Værdi. Tallet ib ligger paa OY, til den ene eller den anden Side af O, efter som b er positiv eller negativ.

Eks. 1. Afsæt Punkterne -3, $3i$, $-3i$, $1 + 2i$, $1 + i$, $2 - 3i$, $3 + 4i$, $-3 + 4i$ og bestem deres Moduler og Argumenter.

2. En Cirkel om O med Radius 2 deles i 6 lige store Dele, saa at det ene Delingspunkt falder i OX. Angiv Delingspunkternes Moduler og Argumenter.

41. **Addition.** Af

$$x = a + ib,\ y = a_1 + ib_1$$

skal følge

$$x + y = (a + a_1) + i(b + b_1). \tag{3}$$

Man ser let, at det til $x + y$ svarende Punkt i Følge (3) er den fjerde Vinkelspids af et Parallelogram, hvis tre andre Vinkelspidser ere O, x og y. Vor Udvidelse af Begrebet Sum bør altsaa være en saadan, at Addition af x og y giver dette Punkt; er denne Fordring opfyldt, vil man komme tilbage til det sædvanlige Additionsbegreb, naar x og y falde i OX (ere reelle). Følgende Definition opfylder Fordringen:

Summen dannes af den ene Addend, som den anden Addend dannes af Nul.

y dannes af 0 ved at afsætte a_1 og b_1 i Retningerne $+$ og i; $x+y$ dannes altsaa, ifølge Definitionen, af x ved at gaa ud fra dette Punkt og afsætte a_1 og b_1 i Retningerne $+$ og i, altsaa ved fra x at trække en Linie, lig og parallel med Oy. Man ser let, at, ifølge denne Definition, er $y+x=x+y$ og $x+(y+z)=x+y+z$. Da Sætningerne i Addition og Subtraktion udledes af disse Ligninger, vedblive de at gælde med den udvidede Betydning af Begreberne.

42. **Multiplikation.** Af

$$x = r(\cos v + i\sin v);\quad y = r_1(\cos v_1 + i\sin v_1)$$

skal følge

$$\left.\begin{aligned} xy &= rr_1\,((\cos v\cos v_1 - \sin v\sin v_1)\\ &\qquad + i(\sin v\cos v_1 + \cos v\sin v_1))\\ &= rr_1(\cos(v+v_1) + i\sin(v+v_1)) \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

der udtrykker, at to komplekse Tal multipliceres, naar man multiplicerer deres Moduler og adderer deres Argumenter. Følgende Definition af Begrebet Produkt vil tilfredsstille de to ovenfor stillede Betingelser:

Produktet dannes af den ene Faktor, som den anden Faktor dannes af Enheden.

Lad A være det Punkt, som svarer til Tallet 1. Punktet x findes da ved at multiplicere OA med r, hvorved vi faa et nyt Punkt A_1, liggende i OX; OA_1 drejes derpaa Vinklen v, og A_1 falder i x. x dannes altsaa af Enheden ved en almindelig Multiplikation med Modulus og en Drejning lig Argumentet. Skal x nu multipliceres med y, multipliceres derfor, ifølge Defini-

tionen, først Ox med r_1, og derpaa drejes Linien Vinklen v_1; vi komme derved til et Punkt z, hvis Modulus er rr_1, og hvis Argument er $v + v_1$, saa at z netop falder sammen med det Punkt xy, som vi fandt ovenfor ved at multiplicere x og y efter de sædvanlige Regler for flerleddede Størrelsers Multiplikation.

Dersom man ombytter x og y, kommer man dog til det samme Punkt z. Faktorernes Orden er derfor ligegyldig.

Af Reglen for Multiplikation udleder man, at to komplekse Tal divideres, naar man dividerer deres Moduler og subtraherer deres Argumenter.

Af (4) kunne de tidligere beviste Sætninger om Multiplikation og Divisjon udledes; de vedblive derfor at gælde med den udvidede Betydning af Begreberne.

Eks. $(+2)(-3) = -6$, idet $2 . 3 = 6$; $0 + \pi = \pi$.

$i . i = -1$, idet $1 . 1 = 1$; $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$.

$(-i)i3 = 3$, idet $1 . 3 = 3$; $\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = 2\pi$.

$(1 + i) : (1 - i) = i$, idet $\sqrt{2} . \sqrt{2} = 1$;

$\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$.

43. **Potensopløftning.** Af (4) følger

$$(r(\cos v + i \sin v))^p = r^p(\cos pv + i \sin pv), \qquad (5)$$

idet p er et helt, positivt Tal; man opløfter altsaa et komplekst Tal til en Potens ved at opløfte Modulus til Potensen og multiplicere Argumentet med Eksponenten. Heraf følger, at man uddrager en Rod af et komplekst Tal ved at uddrage Roden af Modulus (hvorved kun Rodens positive Værdi benyttes) og dividere Argumentet med Eksponenten.

Ved Roduddragningen er der et særligt Hensyn at tage. Naar vi have sagt, at et komplekst Tal har et bestemt Argument, er dette at forstaa saaledes, at Argumentet kun har een Værdi i de første fire Kvadranter; er denne Værdi v, bliver Argumentet i Virkeligheden $2p\pi + v$, hvor p er et vilkaarligt helt Tal, thi Stillingen af Ox forandres ikke ved, at denne Linie gør et Antal hele Omdrejninger. Leddet $2p\pi$ have vi hidtil udeladt, fordi det bliver uden Betydning ved Addition, Multiplikation og Potensopløftning; ved Roduddragning, hvor Argumentet skal divideres, er det derimod nødvendigt at tage Leddet $2p\pi$ med, da man kan faa virkelig forskellige Løsninger for forskellige Værdier af p. Uddrager man den q^{de} Rod, faar man saaledes forskellige Løsninger for $p = 0, 1, 2, \ldots q-1$, men større kan det ikke nytte at tage p, da man derved blot faar de samme Løsninger periodisk igen.

Eks. $1^{\frac{1}{3}}$. Modulus er 1, Argumentet $2p\pi$; den søgte Modulus er altsaa 1, medens det søgte Argument har de tre Værdier ($p = 0$, 1 og 2)

$$0, \frac{2\pi}{3} \text{ og } \frac{4\pi}{3}. \quad \text{(Smlgn. II. 33 Eks. 1.)}$$

$1^{\frac{1}{4}}$ har Mod. 1 og Argumenterne 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, saa at Værdierne ere

$$+1, \quad +i, \quad -1, \quad -i.$$

$(-32)^{\frac{1}{5}}$; den søgte Modulus er $\sqrt[5]{32} = 2$. For Argumenterne faas de 5 Værdier

$$\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}.$$

I (5) forudsatte vi p positiv, hel; man ser imidlertid let, at (5) ogsaa gælder for p negativ og brudden.

44. **Den binome Ligning.** Vi forstaa herved Ligningen

$$x^n = a. \qquad (6)$$

Denne Ligning kan nu løses fuldstændig, idet dens Rødder ere alle Værdierne af $a^{\frac{1}{n}}$. Vi ville her forudsætte a reel; a er da positiv eller negativ.

1) a positiv. x faar Modulus $\sqrt[n]{a}$; Argumenterne ere

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots \frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

Det første Argument tilhører en positiv Rod; er n lige, maa π findes i Rækken af Argumenter, saa at man ogsaa faar en negativ Rod, medens de øvrige $n-2$ Rødder ere komplekse; er n ulige, kan π ikke findes mellem Rækken af Argumenter; man faar altsaa 1 positiv og $n-1$ komplekse Rødder.

2) a negativ. x faar Modulus $\sqrt[n]{-a}$; Argumenterne ere

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Er n lige, findes hverken 0 eller π i denne Række; alle Rødderne ere komplekse; er n ulige, findes π i Rækken, nemlig for $2p+1=n$; man faar altsaa 1 negativ og $n-1$ komplekse Rødder.

De komplekse Rødder ere altsaa i alle Tilfælde til Stede i lige Antal; ved at undersøge Rækkerne af Argumenter ser man, at to og to Argumenter have Summen 2π; de komplekse Rødder ere derfor konjugerede to og to.

Til Øvelse eftervises Beliggenheden af Rødderne i $x^2 = \pm 16$; $x^3 = \pm 8$; $x^6 = \pm 1$; $x^7 = \pm 1$; $x^8 = \pm 1$.

45. **Inkomplette Ligninger.** Sætningerne om Regning med Potenser maa undersøges nærmere, thi ved Beviserne for disse forudsatte vi ikke, at $a^{\frac{m}{n}}$ kan have flere Værdier; vi maa derfor undersøge, om de Ligninger, vi opstillede, give alle de søgte Værdier eller kun nogle af dem; i det sidste Tilfælde kalde vi Ligningerne inkomplette.

Af Ligningerne

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a, \quad (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$$

er den første komplet, men den anden inkomplet, thi man har kun een Værdi paa højre, men n Værdier paa venstre Side af Lighedstegnet; Ligningen bør skrives

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a \,.\, 1^{\frac{1}{n}}$$

og er da komplet.

Ligningen

$$a^{\frac{p}{q}} \,.\, a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{sq}}$$

er komplet, naar Brøkerne ere uforkortelige, thi man har qs Værdier paa begge Sider af Lighedstegnet.

Ligningen

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \,.\, b^{\frac{p}{q}}$$

er komplet; paa venstre Side have vi q Værdier; paa højre Side har hver Faktor q Værdier; Produktet har dog ikke q^2, men kun q Værdier, thi Produktets q^{de} Potens har kun een Værdi. Man maa derfor faa alle Produktets q Værdier, naar man multiplicerer de q Værdier af den ene Faktor med en vilkaarlig af den anden Faktors Værdier; paa denne Maade faar man nemlig q forskellige Værdier.

Ligningen

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$$

er komplet, naar den sidste Eksponent ikke forkortes, thi begge Sider have qs Værdier.

46. Vi have nu udvidet vort Størrelsesbegreb og Regningsarternes Begreber saaledes, at vore Sætninger gælde baade om reelle og komplekse Størrelser; dog maa vi stadig forudsætte Eksponenterne rationale og reelle; Udvidelsen til irrationale og komplekse Eksponenter, der frembyde særlige Vanskeligheder, gennemføres i den almindelige Funktionslære.

At visse ubekendte Tal i en Opgave vides at være reelle, kan ved deres Bestemmelse ofte erstatte en Ligning; saaledes kan man kun have

$$a + ib = c + id,$$

hvor a, b, c og d ere reelle, hvis $a = c$ og $b = d$.

Eks. Af Ligningen (Moivres Formel)

$$(\cos v + i \sin v)^n = \cos nv + i \sin nv$$

findes, naar Binomialformlen anvendes paa venstre Side, en Ligning, der deler sig i de to

$$\cos nv = \cos^n v - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \cos^{n-2} v \sin^2 v + \ldots,$$

$$\sin nv = n \cos^{n-1} v \sin v - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos^{n-3} v \sin^3 v + \ldots$$

Om Ligninger.

47. Den almindelige algebraiske Ligning af n^{te} Grad antager, naar den er ordnet, Formen

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

Vi have bevist (I. 55), at dersom $x = \alpha_1$ gør $f(x)$ til Nul, maa $x - \alpha_1$ gaa op i $f(x)$, saa at man identisk har

$$f(x) = (x - \alpha_1)\, Q,$$

[illegible]

[illegible] Resultatet ikke [illegible] ; man [illegible] giver [illegible] Resultat [illegible] Resul-

tatets Modulus bliver mindre og mindre, maa man tilsidst finde Værdier af α og β, for hvilke Resultatets Modulus er Nul, og man har da fundet en Rod i Ligningen.

49. Af Faktorerne $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$ kunne flere være ens; er $(x - \alpha)^p$ Faktor i $f(x)$, siger man, at α er Rod p Gange i $f(x) = 0$ (lige Rødder, multiple Rødder); man opnaar ved denne Vedtægt at kunne udtale den Sætning som fuldstændig almengyldig, at enhver Ligning af n^{te} Grad har n Rødder.

Idet vi forudsætte, at den givne Ligning har reelle Koefficienter, kunne vi bevise, at Ligningens komplekse Rødder altid ere konjugerede to og to. Antag nemlig, at $a + ib$ er Rod; indsættes denne Rod i $f(x)$, faar man ved Anvendelse af Binomialformlen et Udtryk af Formen $A + iB$, hvor A og B ere reelle; dette Udtryk maa have Værdien Nul, hvilket kun er muligt, hvis $A = 0$ og $B = 0$. Indsætter man $a - ib$ i $f(x)$, faar man et Resultat, der kan udledes af det forrige ved at ombytte b med $-b$; i A forekommer imidlertid b overalt med lige Eksponent, medens alle Leddene i B indeholde en Faktor b med ulige Eksponent. A bliver derfor uforandret, medens B skifter Fortegn, idet b ombyttes med $-b$; man faar altsaa $f(a - ib) = A - iB$, men dette Udtryk har Værdien Nul, da $A = 0$ og $B = 0$. $a - ib$ er altsaa Rod i Ligningen.

50. **Koefficienterne udtrykte ved Rødderne.** Idet Rødderne i $f(x) = 0$ ere α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, har man identisk

$$x_n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$
$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Udføres Multiplikationen paa højre Side (8), og sammenlignes Koefficienterne i de identiske Udtryk paa begge Sider af Lighedstegnet, faar man

$$\left.\begin{aligned} -a_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n, \\ a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ -a_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n a_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

I Almindelighed er altsaa Koefficienten a_p lig Summen af alle de Produkter af p og p af Rødderne, som kunne dannes (i Antal $K_{n,\,p}$), med samme eller modsat Tegn, efter som p er lige eller ulige. Ved Hjælp af denne Sætning kan man danne en Ligning, hvis Rødder ere opgivne.

Eks. Ligningen med Rødderne 1, 2 og 3 er

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Da sidste Led af en ordnet Ligning, hvor x^n har Koefficienten 1, er Produktet af Rødderne med samme eller modsat Tegn, kan det være hensigtsmæssigt at prøve, om et af de positive eller negative hele Tal, som gaa op i a_n (der er forudsat hel), er Rod i Ligningen.

Eksempler til Øvelse.

1. Hvilken Ligning har Rødderne -1, 1, 2 og 3?
2. Hvilken Ligning har Rødderne $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ og 2?
3. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Kvadraterne af Rødderne i $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
4. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Summerne af to og to af Rødderne i Ligningen i Eks. 3.

5. I en Ligning af tredje Grad $f(x) = 0$ er a 2 Gange Rod; bevis, at a ogsaa er Rod i Ligningen $f'(x) = 0$.
6. Find Rødderne i $x^{12} - 65x^6 + 64 = 0$.
7. Find Summen af Kvadraterne af Rødderne i den almindelige Ligning af tredje Grad.
8. Kan den almindelige Ligning af fjerde Grad reduceres til en kvadratisk Ligning ved, at man tager et Udtryk af anden Grad som ny ubekendt?
9. Hvilken Værdi maa y have, naar de to Ligninger
$$x^3 - x^2 - x + y = 0 \quad \text{og} \quad 3x^2 - 2x - y = 0$$
have en Rod fælles?

